Ekonomska fakulteta

AKTUARSKA MATEMATIKA 1

Smer Aktuarstvo

Pisni izpit

7. julij 2008

Ime in priimek: ______________________________

Navodilo

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Rešitev naloge mora zajemati vse potrebne izračune in utemeljitve. Nalog je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk.

Naloga	***a.***	***b.***	***c.***	***d.***	***e.***	***f.***	***Skupaj***
1.				•	•	•	
2.			•	•	•	•	
3.			•	•	•	•	
4.		•	•	•	•	•	
5.					•	•	
6.		•	•	•	•	•	
Skupaj							

1. (20) Oseba vzame stanovanjski kredit v višini 200.000 €. Po pogodbi na koncu vsakega leta zapade plačilo v fiksnem znesku 18.000 €, le zadnji obrok bo manjši. Efektivna obrestna mera naj bo 5%.

a. (5) Koliko obrokov po 18.000 € bo oseba morala plačati?

Rešitev: Označimo iskano število obrokov z n. Sedanja vrednost n obrokov mora biti manjša ali enaka višini kredita, sedanja vrednost $n+1$ obrokov pa večja. Naj bo v diskontni faktor, A obrok in C višina dolga. Veljati mora

$$A(v + v^2 + \cdots + v^n) \leq C < A(v + v^2 + \cdots + v^n + v^{n+1}) \,.$$

Ugotovimo, da je 16 obrokov v sedanji vrednosti 195.079,8 € in 17 obrokov 202.933,2 €. Oseba bo plačala 16 obrokov po 18.000 €.

b. (5) Kolikšen bo zadnji obrok?

Rešitev: Sedanja vrednost zadnjega obroka je enaka 4.920,15. Obrok bo oseba plačala na koncu 17. leta. Dejanski obrok bo sedanja vrednost pomnožena z $(1+i)^{17}$, torej 11,277,07 €.

c. (10) Kolikšen del zadnjega obroka bodo obresti in kolikšen del bo odplačilo glavnice?

Rešitev: Sedanja vrednost preostale glavnice po plačilu 16. obroka bo 4.920,15. Dejanska preostala glavnica bo sedanja vrednost pomnožena z $(1+i)^{16}$, kar je 10.740,07 €. To bo tudi glavnica, ki jo bomo izplačali z zadnjim obrokom. Del obresti v zadnjem obroku bo $i \cdot 10.740,07 =$ 537,00 €.

2. (20) Obveznica XS0127672938 Republike Slovenije je bila izdana leta 2001. Fiksna efektivna obrestna mera obveznice, po kateri se izplačujejo kuponi, je 5,375%. Izplačila kuponov so na datume 10.10.2008, 10.10.2009, 10.10.2010 in 4.11.2011. Na zadnji datum vam vrnejo tudi glavnico, ki znaša 100 enot.

a. (10) Cena obveznice na dan 7.7.2008 je 101.90. Bi se odločili za nakup? Privzemite, da je obrestna mera, s katero diskontiramo, enaka tisti na obveznici, torej 5,375%.

Rešitev: Iz besedila izhaja, da vsakič, ko izplačamo kupon po dani obrestni meri, začnejo znova teči obresti na glavnico P. *Če so trenutki izplačil* t_1, t_2, t_3 *in* t_4, *Bodo v obdobju med* t_i *in* t_{i+1} *obresti nanesle* $P(1+i)^{t_{i+1}-t_i} - P$, *te pa diskontiramo s faktorjem* $v^{t_{i+1}}$. *Pri tem je* $t_0 = 0$ *in* $i = 0, 1, 2, 3, 4$. *Sedanja vrednost prihodnjih izplačil iz naslova kuponov je torej* $P - Pv^{t_4}$. *Sedanja vrednost glavnice pa je* Pv^{t_4}. *Sedanja vrednost vseh denarnih tokov je* P, *kar je manj kot trenutna cena.*

b. (10) Recimo, da bi bila cena 101,34 in efektivna obrestna mera 4,834%. Bi se v tem primeru odločili za nakup?

Rešitev: Označimo $i = 0.05375$ *in* $j = 0.04834$. *V oznakah iz prvega dela je sedanja vrednost obresti v obdobju med* t_i *in* t_{i+1} *enaka*

$$\left(P(1+i)^{t_{i+1}-t_i} - P\right)(1+j)^{-t_{i+1}}\,.$$

Do zapadlosti kuponov je 95, 460, 825 *in* 1215 *dni. Sedanja vrednost kuponov je* 16.17. *Sedanja vrednost izplačila glavnice je* 85, 46. *V tem primeru obveznico kaže kupiti.*

3. (20) Privzemite, da so dane verjetnosti p_x za vse $x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

a. (10) Izrazite ${}_tp_x$ s količinami p_x, pri čemer je t celo število.

Rešitev: Velja osnovno pravilo ${}_tp_{x+s} \cdot {}_sp_x = {}_{t+s}p_x$. *Sledi*

$$
{}_tp_x = p_{x+t-1} \cdots p_{x+t-2} \cdot p_x = \prod_{k=0}^{t-1} p_{x+k} \,.
$$

b. (10) Izrazite $e_x = E(K_x)$ s količinami p_x.

Rešitev: Za nenegativne slučajne spremenljivke je

$$
E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) \,.
$$

Sledi

$$
e_x = E(K_x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(K_x \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=0}^{k-1} p_{x+l} \,.
$$

4. (20) Oseba stara x let kupi zavarovanje za primer smrti za vse življenje. Zavarovana vsota je 10.000 EUR. Premije se plačuje na začetku leta za naslednjih 20 let po sklenitvi zavarovanja, če je oseba še živa. Zavarovano vsoto zavarovalnica izplača ob koncu leta smrti. Efektivna obrestna mera naj bo i. Posebnost pogodbe je, da v času plačevanja premij v primeru smrti zavarovalnica poleg zavarovane vsote izplača tudi neobrestovano polovico zadnje premije, vendar ne po preteku 20 let.

a. (20) Naj bo $d = i/(1+i)$. Pokažite, da je premija enaka

$$\Pi = \frac{10.000 A_x}{(1 + d/2)\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} - (1 - v^{20}{}_{20}p_x)/2}\,.$$

Rešitev: Označimo zavarovano vsoto s C. Veljati mora

$$C \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_k p_x q_{x+k} + \frac{\Pi}{2} \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_k p_x q_{x+k} = \Pi \sum_{k=0}^{19} v^k{}_k p_x\,.$$

Velja $\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_k p_x q_{x+k} = A_x$ *in* $\sum_{k=0}^{19} v^k{}_k p_x = \ddot{a}_{x:\,\overline{20|}}$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_k p_x q_{x+k} &= \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_k p_x (1 - p_{x+k}) \\
&= \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_k p_x - \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_k p_x p_{x+k} \\
&= v \sum_{k=0}^{19} v^k{}_k p_x - \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_{k+1} p_x \\
&= v\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} - \sum_{k=1}^{20} v^k{}_k p_x \\
&= v\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} - \sum_{k=0}^{19} v^k{}_k p_x + {}_0p_x - v^{20}{}_{20}p_x \\
&= v\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} - \ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} + 1 - v^{20}{}_{20}p_x \\
&= (v-1)\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} + 1 - v^{20}{}_{20}p_x \\
&= -d\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} + 1 - v^{20}{}_{20}p_x\,.
\end{aligned}$$

Formula sledi.

5. (20) Oseba stara x let kupi zavarovanje za primer smrti za vse življenje. Zavarovana vsota je 10.000 EUR. Premije se plačuje na začetku leta za naslednjih 20 let po sklenitvi zavarovanja, če je oseba še živa. Zavarovano vsoto zavarovalnica izplača ob koncu leta smrti. Efektivna obrestna mera naj bo i. Posebnost pogodbe je, da v času plačevanja premij v primeru smrti zavarovalnica poleg zavarovane vsote izplača tudi neobrestovano polovico zadnje premije, vendar ne po preteku 20 let.

a. (5) Izrazite ${}_{20}V$ z primernim A_y. Formulo utemeljite.

Rešitev: Po obdobju 20 *let ne bo več plačevanja premij, zato morajo biti rezervacije enake pričakovani sedanji vrednosti prihodnjih obveznosti, torej pričakovana sedanja vrednost zavarovanja za smrt za vse življenje za osebo staro* $x + 20$*. Sledi* ${}_{20}V = CA_{x+20}$*, kjer je* $C = 10.000$*.*

b. (5) Izrazite ${}_{0}V$. Formulo utemeljite.

Rešitev: Po definiciji je ${}_{0}V = 0$*, ker izenačimo neto pričakovano sedanjo vrednost obveznosti in neto sedanjo vrednost premij v prihodnosti.*

c. (5) Izrazite ${}_{19}V$. Formulo utemeljite.

Rešitev: Pričakovana sednja vrednost obveznosti na začetku predzadnjega leta je

$$CA_{x+19} + \frac{v\Pi}{2}\,{}_{19}p_x q_{x+19}\,,$$

obveznosti pa lahko zmanjšamo za premijo Π*, ki je še edina premija v preostalem obdobju. Sledi*

$${}_{19}V = CA_{x+19} + \frac{v\Pi}{2}\,{}_{19}p_x q_{x+19} - \Pi\,.$$

d. (5) Izrazite ${}_{1}V$. Formulo utemeljite.

Rešitev: Pričakovana sedanja vrednost obveznosti v prihodnosti je

$$CA_{x+1} + \frac{\Pi}{2}\sum_{k=0}^{18} v^{k+1}\,{}_{k}p_{x+1} q_{x+k+1}\,,$$

ki jo zmanjšamo za premije, torej

$$\Pi \sum_{k=0}^{18} v^k {}_k p_{x+1} \, .$$

6. (20) Moški star 60 let je lastnik nepremičnine v vrednosti 200.000 €. Zavarovalnica ponuja izplačilo doživljenjske rente brez plačila premij v višini 14.000 € na koncu vsakega leta, s tem, da zavarovalnica ob smrti zavarovanca postane lastnica nepremičnine v celoti. Privzemite, da je efektivna obrestna mera enaka 4%. Privzemite, da bo sedanja vrednost nepremičnine ves čas enaka. Privzemite, da je $\ddot{a}_{61}$=18,24 in $p_{60} = 0,9972$.

a. (20) Bi moškemu priporočali podpis pogodbe, ki jo ponuja zavarovalnica?

   Rešitev: Označimo $C = 14.000$€. Pričakovana sedanja vrednost rente je
   $$PV = Cvp_{60}\ddot{a}_{61}\,,$$
   torej $PV = 244.850,95$. Ponudba je velikodušna in priporočamo nakup.