Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta

Kvantitativne finance in aktuarstvo

Aktuarska matematika

Pisni izpit

19. junij 2012

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Dovoljena sredstva sta dva A4 format lista in matematični priročnik. Vaše odgovore prosim napišite na priložene liste. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.				•	
3.			•	•	
4.				•	
Skupaj					

1. (20) Banka vam ponuja dve različni vezani vlogi. Prva ima fiksno obrestno mero 3% za vezavo v trajanjo 10 let. Pri drugi začnemo z obrestno mero 2,5%, ki se potem vsako naslednje leto poveča za 0,1%. Druga vezana vloga traja 10 let, iz besedlila pa izhaja, da je obrestna mera zadnje leto pred iztekom 3,4%.

a. (20) Katera vezana vloga je boljša?

Rešitev: Akumulirana vrednost vezane vloge z začetnim vložkom C ob izteku bo v primeru fiksne obrestne mere enaka

$$C \cdot 1,03^{10} = C \cdot 1,3439\,,$$

v primeru naraščajoče pa

$$C \cdot \prod_{k=0}^{9}(1,025 + k \cdot 0,001) = C \cdot 1,3374\,.$$

Nekoliko boljša je prva možnost.

2. (20) V spodnji tabeli je amortizacijski načrt za obveznico RS 53. Če obveznico kupite danes, boste v prihodnosti dobivali plačila kuponov po navedenem načrtu, na koncu pa boste dobili še glavnico. Obveznica je denominirana v EUR in jo je možno kupiti v apoenih po 100,00 EUR. Privzemite, da je leto dolgo 1 enoto, deleži leta pa se računajo s privzetkom, da ima leto 365 dni.

a. (10) Cena apoena obveznice na dan 31.5.2012 je 99,2 EUR. Bi se odločili za nakup te obveznice, če predpostavite, da bo letna efektivna obrestna mera v obdobju konstantno enaka 2,25%?

Rešitev: V prihodnosti bomo prejeli še šest kuponov in glavnico. Do izplačila prvega kupone je 312 dni, kar v letih pomeni $t = 0.8547$. *Označimo* $i = 0,025$ *in* $v = (1+i)^{-1}$. *Sedanja vrednost denarnega toka na dan 31. 5. 2012 je*

$$PV = 4,875 \sum_{k=0}^{5} v^{t+k} + 100 \cdot v^{t+5}\,.$$

Poenostavimo v

$$PV = 4,875 \cdot \frac{v^t(1-v^6)}{1-v} + 100 \cdot v^{t+5} = 114,95\,.$$

Nakup obveznice je zelo ugoden.

b. (10) Privzemite, da bi vsa izplačila kuponov ponovno investirali pri privzetku, da je efektivna letna efektivna obrestna mera do dneva zapadlosti glavnice enaka 2,25%. Ali bi omenjene transakcije imele vpliv na vašo odločitev o nakupu?

Rešitev: Transakcija nima vpliva na našo odločitev. Sedanja vrednost investiranih kuponov je pri privzetkih iz besedila enaka.

Datum	Št. kupona	Kupon	Izplač. glavnice	Preostala glavnica
08.04.2003	1	4,875	0	100
08.04.2004	2	4,875	0	100
08.04.2005	3	4,875	0	100
08.04.2006	4	4,875	0	100
08.04.2007	5	4,875	0	100
08.04.2008	6	4,875	0	100
08.04.2009	7	4,875	0	100
08.04.2010	8	4,875	0	100
08.04.2011	9	4,875	0	100
08.04.2012	10	4,875	0	100
08.04.2013	11	4,875	0	100
08.04.2014	12	4,875	0	100
08.04.2015	13	4,875	0	100
08.04.2016	14	4,875	0	100
08.04.2017	15	4,875	0	100
08.04.2018	16	4,875	100	0

Tabela 1 Amortizacijski načrt za obveznico RS53.

3. (20) Privzemite, da za življenjsko dobo velja Makehamov zakon z jakostjo smrtnosti

$$\mu_s = A + Bc^s$$

za $s \geq 0$. Privzemite, da so dane verjetnosti ${}_{10}p_{50}$, ${}_{10}p_{60}$ in ${}_{10}p_{70}$.

a. (10) Izračunajte

$$\left(\frac{\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60})}{\log({}_{10}p_{60}) - \log({}_{10}p_{50})} \right)^{1/10} .$$

Rešitev: Po definiciji je

$${}_tp_x = \exp\left(- \int_x^{x+t} \mu_s \, \mathrm{d}s \right) .$$

Sledi, da je

$$\log\left({}_tp_x\right) = -At - \frac{B(c^{x+t} - c^x)}{\log c} .,$$

Vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo

$$\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60}) = -\frac{Bc^{60}}{\log c}(c^{20} - 2c^{10} + 1) .$$

Podobno dobimo

$$\log({}_{10}p_{60}) - \log({}_{10}p_{50} = -\frac{Bc^{50}}{\log c}(c^{20} - 2c^{10} + 1) .$$

Vstavimo v izraz in sledi

$$\left(\frac{\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60})}{\log({}_{10}p_{60}) - \log({}_{10}p_{50})} \right)^{1/10} = c .$$

b. (10) Izrazite A in B z danimi verjetnostmi.

Rešitev: Zapišemo recimo

$$\log({}_{10}p_{70}) = -10A - \frac{B}{\log c}(c^{80} - c^{70}) \quad in \quad \log({}_{10}p_{60}) = -10A - \frac{B}{\log c}(c^{70} - c^{60}) .$$

To je sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama. Dobimo

$$\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60}) = \frac{Bc^{60}}{\log c}(-c^{20} + 2c^{10} - 1) .$$

Sledi

$$B = \frac{\log c}{c^{60}(-c^{20} + 2c^{10} - 1)} \cdot \left(\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60})\right) .$$

Iz tega izračunamo še A.

4. (20) Oseba stara x let želi kupiti mešano zavarovanje za dobo n let. Privzemite, da je obrestna mera enaka i. Če se smrt zgodi v letu k pred doživetjem, je izplačilo enako $C(1+j)^{k+1}$ na koncu leta, v katerem je nastopila smrt, kjer je $0 < j < i$. Ob doživetju je izplačilo enako $C(1+j)^n$. Premija se plačuje v enakih zneskih na začetku vsakega leta zavarovanja do vključno začetka zadnjega leta.

a. (10) Izrazite premijo z aktuarskimi simboli. Pri vsakem simbolu navedite, s katerim diskontnim faktorjem je izračunan.

Rešitev: Označimo premijo s Π. *Označimo* $v = (1+i)^{-1}$. *Uporabimo načelo ekvivalence. Veljati mora*

$$\sum_{k=0}^{n-1} C(1+j)^{k+1} v^{k+1} P(K_x = k) + C(1+j)^n v^n P(K_x \geq n) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \Pi P(K_x \geq k)\,.$$

Enačbo lahko prepišemo v

$$C \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{v}^{k+1} P(K_x = k) + C\tilde{v}^n P(K_x \geq n) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \Pi P(K_x \geq k)\,,$$

kjer je $\tilde{v} = (1+j)/(1+i)$. *V aktuarskih simbolih je potem*

$$C A_{x:\overline{n|}} = \Pi \ddot{a}_{x:\overline{n|}}\,,$$

pri čemer se $A_{x:\overline{n|}}$ *nanaša na diskontni faktor* $\tilde{v}$, $a_{x:\overline{n|}}$ *pa na diskontni faktor* v.

b. (10) Izrazite ${}_kV$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ z aktuarskimi simboli. Pri vsakem simbolu navedite, s katerim diskontnim faktorjem je izračunan.

Rešitev: Ko računamo ${}_kV$, *je oseba stara* $x+k$, *preostalo trajanje zavarovanja pa bo* $n-k$. *Zapišemo s podobno logiko kot v prvem delu*

$${}_kV = C(1+j)^k A_{x+k:\overline{n-k|}} - \Pi \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}\,,$$

pri čemer je $A_{x+k:\overline{n-k|}}$ *izračunan z diskontnim faktorjem* $\tilde{v}$, $\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}$ *pa z diskontnim faktorjem* v.

5. (20) Oseba stara x let kupi odloženo doživljenjsko rento z enkratnim vplačilom premije. Oseba bo prejemala izplačilo 1 v trenutkih $m, m+1, \ldots$ šteto od trenutka nakupa. Diskontni faktor naj bo v. Za enoto čas izberemo leto.

a. (10) Izrazite ${}_kV$ za $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Rešitev: Če bo oseba živa v trenutku začetka izplačevanja, bo v tistem trenutku vrednost doživljenjske rente enaka $\ddot{a}_{x+m}$. *V trenutku* k *bo sedanja vrednost te rente* $v^{m-k}\ddot{a}_x$, *vendar bomo to vsoto potrebovali le, če bo oseba dočakala začetek izplačevanja. Torej bo*

$$ {}_kV = v^{m-k}{}_{m-k}p_{x+k}\ddot{a}_{x+m}\,. $$

b. (10) Pogodbo spremenimo tako, da oseba plačuje premijo v času varčevanja v trenutkih $0, 1, \ldots, m-1$ šteto od sklenitve pogodbe. V primeru smrti pred začetkom izplačevanja rente, svojci dobijo delež α nominalne do trenutka smrti vplačane premije na koncu leta smrti. Izrazite ${}_kV$ za $k = 0, 1, \ldots, m-1$ v tem primeru.

Rešitev: Po načelu ekvivalence najprej izrazimo premijo. Veljati mora

$$ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha(k+1)v^{k+1}\Pi P(K_x = k) + v^m\ddot{a}_{x+m}P(K_x \geq m) = \sum_{k=0}^{m-1} \Pi v^k P(K_x \geq k)\,. $$

Iz te enačbe lahko izrazimo premijo Π. *Ko premijo enkrat imamo, lahko zapišemo*

$$ \begin{aligned} {}_kV &= \\ &= \sum_{l=0}^{m-k-1} \alpha\Pi(1+i)^{k+l+1}v^{l+1}P(K_{x+k} = l) + v^{m-k}\ddot{a}_{x+m} - \\ &\qquad -\Pi\ddot{a}_{x+k:\overline{m-k|}}\,. \end{aligned} $$

6. (20) Oseba stara x let želi kupiti mešano zavarovanje za dobo n let. Privzemite, da je obrestna mera enaka i. Če se smrt zgodi v letu k pred doživetjem, je izplačilo enako $C(1+j)^{k+1}$ na koncu leta, v katerem je nastopila smrt, kjer je $0 < j < i$. Ob doživetju je izplačilo enako $C(1+j)^n$. Premija se plačuje v enakih zneskih na začetku vsakega leta zavarovanja do vključno začetka zadnjega leta. Začetni stroški naj bodo α in delež $\bar{\beta}$ prve premije. Od druge plačane premije naprej, če do plačila pride, zavarovalnica obračunava delež β premije kot strošek procesiranja plačila premije. Drugih stroškov ni.

a. (10) Izrazite premijo z aktuarskimi simboli. Pri vsakem simbolu navedite, s katerim diskontnim faktorjem je izračunan.

Rešitev: Označimo $\tilde{v} = (1+j)/(1+i)$ in označimo iskano premijo z Π. Po načelu ekvivalence mora veljati

$$\alpha + \bar{\beta}\Pi + \sum_{k=0}^{n-1} C\tilde{v}^{k+1} P(K_x = k) + \\ + \; C\tilde{v}^n P(K_x \geq n) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta v^k \Pi P(K_x \geq k) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \Pi v^k P(K_x \geq k)\,.$$

V aktuarskih simbolih je

$$\alpha + \bar{\beta}\Pi + CA_{x:\,\overline{n}|} + \beta\Pi\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \beta\Pi = \Pi\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}\,.$$

Simbol $A_{x:\,\overline{n}|}$ je izračunan z diskontnim faktorjem $\tilde{v}$, simbol $a_{x:\,\overline{n}|}$ pa z diskontnim faktorjem v. Iz enačb lahko izračunamo premijo Π.

b. (10) Izrazite ${}_kV$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ z aktuarskimi simboli. Pri vsakem simbolu navedite, s katerim diskontnim faktorjem je izračunan.

Rešitev: Za $k < n-1$ je

$${}_kV = C(1+j)^k A_{x+k:\,\overline{n-k}|} + \beta\Pi\ddot{a}_{x+k:\,\overline{n-k}|} - \beta\Pi - \Pi\ddot{a}_{x+k:\,\overline{n-k}|}\,.$$

Simbol $A_{x+k:\,\overline{n-k}|}$ je izračunan z diskontnim faktorjem $\tilde{v}$, simbol $a_{x+k:\,\overline{n-k}|}$ pa z diskontnim faktorjem v. Iz enačb lahko izračunamo premijo Π.

Za $k = m-1$ je situacija različna v toliko, da ne bo nobene premije več in s tem tudi ne več deleža premije. Sledi

$${}_{m-1}V = C(1+j)^n v\,.$$