FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Pisni izpit

9. januar 2020

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.
1.			•	•
2.			•	•
3.			•	•
4.				•
Skupaj				

1. (20) Naj bosta B in D neodvisni standardni Brownovi gibanji glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Definirajte

$$M_t = B_t^4 - 6B_t^2 D_t^2 + D_t^4$$

a. (10) Pokažite, da je M martingal.

Rešitev: Iz Itôve formule dobimo

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 + \int_0^t \left(4B_s^3 - 12B_s D_s^2\right) dB_s + \int_0^t \left(-12B_s^2 D_s + 4D_s^2\right) dD_s \\ &\quad + 6\int_0^t \left(B_s^2 - D_s^2\right) ds + 6\int_0^t \left(-B_s^2 + D_s^2\right) ds \\ &= M_0 + \int_0^t \left(4B_s^3 - 12B_s D_s^2\right) dB_s + \int_0^t \left(-12B_s^2 D_s + 4D_s^2\right) dD_s\,. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\langle B, D\rangle = 0$ zaradi neodvisnosti. Vsi integrandi so kvadratno integrabilni, zato je M martingal.

b. (15) Naj bo $T = \inf\{t \geq 0\colon B_t^2 + D_t^2 = 1\}$. Utemeljite, da je $P(T < \infty) = 1$ in uporabite M za izračun $E(B_T^2 D_T^2)$. Utemeljite vse korake.

Rešitev: Vemo, da je opcijski čas $T_1 = \inf\{t \geq 0\colon B_t = 1\}$ končen z verjetnostjo 1. Ker je $T \leq T_1$, isto velja tudi za T. Velja

$$E(M_{T\wedge t}) = 0\,.$$

Zaradi omejenosti M^T lahko pošljemo $t \to \infty$ in po izreku o dominirani konvergenci velja $E(M_T) = 0$. Po drugi strani je

$$M_T = (B_T^2 + D_T^2)^2 - 8B_T^2 D_T^2 = 1 - 8B_T^2 D_T^2\,.$$

Sledi

$$E(B_T^2 D_T^2) = \frac{1}{8}\,.$$

2. (25) Naj bodo $H_n(x,t)$ polinomi v spremenljivkah x in t, pri čemer je $H_n(x,t)$ stopnje n v spremenljivki x. Predpostavite, da je $H_0(x,t) = 1$, $H_n(0,0) = 0$ za $n \geq 1$ ter

$$\frac{\partial H_n}{\partial x}(x,t) = nH_{n-1}(x,t)$$

in

$$\frac{\partial H_n}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

za $n \geq 1$. Definirajte

$$M_t^n = H_n(B_t, t)$$

za $n = 0, 1, \ldots$, kjer je B standardno Brownovo gibanje.

a. (10) Pokažite, da je za vsak $n \geq 0$ proces M^n kvadratno integrabilen martingal.

Rešitev: Trditev velja za $n = 0$. Predpostavimo, da je M^n kvadratno integrabilen martingal. Računamo s pomočjo Itôve formule

$$\begin{aligned} M_t^{n+1} &= H_{n+1}(B_t, t) \\ &= \int_0^t \frac{\partial H_{n+1}}{\partial x}(B_s, s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial H_{n+1}}{\partial t}(B_s, s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 H_{n+1}}{\partial x^2}(B_s, s) ds \\ &= \int_0^t nH_n(B_s, s) dB_s \,. \end{aligned}$$

Sledi, da je M^{n+1} lokalni martingal. Po indukcijski predpostavki je M^n kvadratno integrabilen martingal, zato je

$$E\left[(M_s^n)^2\right] \leq E\left[(M_t^n)^2\right]$$

za $s \leq t$ in posledično

$$\int_0^t E\left[(nM_s^n)^2\right] ds \leq n^2 t E\left[(M_t^n)^2\right] < \infty \,.$$

Sklepamo lahko, da je M^{n+1} kvadratno integrabilen martingal.

b. (15) Izračunajte $E\left[(M_t^n)^2\right]$.

Namig: uporabite indukcijo.

Rešitev: Iz definicij je $E\left[\left(M_t^0\right)^2\right] = 1$. Itôva formula nam da

$$M_t^{n+1} = \int_0^t (n+1) M_s^n dB_s \,,$$

Itôva izometrija pa

$$E\left[\left(M_t^{n+1}\right)^2\right] = n^2 \int_0^t E\left[(M_s^n)^2\right] ds \,.$$

Sledi

$$E\left[\left(M_t^1\right)^2\right] = t,\ E\left[\left(M_t^2\right)^2\right] = 2t^2,\ \ldots$$

in po indukciji

$$E\left[\left(M_t^n\right)^2\right] = n! \cdot t^n\,.$$

3. (25) Prilagojen zvezen proces X naj zadošča enačbi

$$dX_t = \mu dt + \sigma X_t dB_t$$

z $X_0 = 1$ in $\sigma > 0$.

a. (10) Definirajte

$$Z_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t} .$$

Izračunajte $d\,(XZ)_t$.

Rešitev: Najprej opazimo, da je

$$dZ_t = \lambda Z_t dB_t \,.$$

Iz tega sledi, da bo

$$d\langle X, Z\rangle_t = \lambda \sigma X_t Z_t dt \,.$$

Računamo

$$\begin{aligned} d\,(XZ)_t &= Z_t dX_t + X_t dZ_t + \lambda\sigma X_t Z_t dt \\ &= Z_t(\mu dt + \sigma X_t dB_t) + \lambda X_t Z_t dB_t + \lambda\sigma X_t Z_t dt \\ &= \mu Z_t dt + \lambda\sigma X_t Z_t dt + (\sigma + \lambda) X_t Z_t dB_t \,. \end{aligned}$$

b. (15) Izračunajte $E(X_t)$.

Namig: za konstanto a ima nehomogena linearna diferencialna enačba

$$u' + au = h$$

rešitev

$$u(t) = u(0)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} h(s) ds \,.$$

Rešitev: V prvi točki lahko λ *še prosto izbiramo. Izberimo si* $\lambda = -\sigma$*, tako da bo stohastični del enačbe odpadel. Ostane nam nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda*

$$d(XZ)_t = \mu Z_t dt - \sigma^2 X_t Z_t dt \,,$$

Rešitev zgornje enačbe pri danem začetnem pogoju je

$$X_t Z_t = e^{-\sigma^2 t} + \mu \int_0^t e^{-\sigma^2 (t-s)} Z_s ds \,.$$

Proces X je enak

$$X_t = Z_t^{-1} \left(e^{-\sigma^2 t} + \mu \int_0^t e^{-\sigma^2 (t-s)} Z_s ds \right) \,.$$

Vemo, da velja

$$E\left(e^{-\sigma^2 t} Z_t^{-1}\right) = 1\,.$$

Opazimo, da je

$$Z_t^{-1} Z_s = e^{-\sigma(B_t - B_s) + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)}\,,$$

zato

$$E(Z_t^{-1} Z_s) = e^{\sigma^2 (t-s)}\,.$$

Sledi

$$E(X_t) = 1 + \mu t\,.$$

4. (25) Naj bo S cena delnice v Black-Scholesovem modelu z obrestno mero $r \in (0,\infty)$ in volatilnostjo $\sigma \in (0,\infty)$. Fiksirajmo zapadlost $T \in (0,\infty)$ in označimo s Q martingalsko mero za interval $[0,T]$, tako da je na $[0,T]$, $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ za Q-Brownovo gibanje W.

Naj bodo dane konstante $0 < b \leq a < \infty$. Izveden finančni instrument ima izplačilo $V_T = f(S_T)$ ob času T, kjer je za $x \in (0,\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} x - a, & \text{če je } x > a \\ b - x, & \text{če je } x < b \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

a. (5) Skicirajte funkcijo $f(x)$. Zapišite $f(S_T)$ kot ustrezno linearno kombinacijo izplačil dveh evropskih nakupnih opcij ter terminske pogodbe (vseh z zapadlostmi T in ustreznimi izvršilnimi cenami).

   Pojasnilo: terminske pogodbe so matematično oblike $S_T - k$ za neko izvršilno ceno k.

   Rešitev: Skica grafa je elementarna. Velja $f(S_T) = (S_T - a)^+ + (b - S_T)^+ = (S_T - a)^+ + (S_T - b)^+ - (S_T - b)$.

b. (10) Določite za $0 \leq t \leq T$

$$V_t := E_Q\left[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t\right].$$

   Rešitev: Vemo, da je za $0 \leq t < T$ in $k \in (0,\infty)$, s.g.

$$Q(t;k) := E_Q\left[e^{-r(T-t)}(S_T - k)^+ | \mathcal{F}_t\right] = S_t \Phi(d_1) - k e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

   kjer je

$$d_1 = \frac{\log(S_t/k) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

   in

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

   Iz linearnosti pričakovane vrednosti sledi, da je s.g.

$$V_t = Q(t;a) + Q(t;b) - (S_t - b e^{-r(T-t)}).$$

   Upoštevali smo, da je diskontirani proces cene delnice Q-martingal.

c. (10) Za $0 \leq t < T$ navedite komponento H_t varovalnega portfelja za opcijo, ki izplača $f(S_T)$ v času T.

   Namig: pomislite, kako moramo varovati terminsko pogodbo.

Rešitev: Iz linearnosti sldei, da je iskani H vsota H-jev za evropski nakupni opciji z izvršnima cenama a in b zmanjšan za H terminske pogodbe z izvršno ceno b. Se pravi

$$\begin{aligned} H_t &= \Phi\left(\frac{\log\left(S_t/a\right)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\qquad + \Phi\left(\frac{\log\left(S_t/b\right)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-1\,. \end{aligned}$$

Za terminsko pogodbo je varovalni portfelj enota temelja-delnice.