FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Finančna matematika 2

Pisni izpit

28. avgust 2020

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.
1.			•	•
2.			•	•
3.			•	•
4.				•
Skupaj				

1. (20) Naj bo B standardno Brownovo gibanje in definirajte proces X kot

$$X_t = B_t^3 - 3tB_t\,.$$

a. (5) Pokažite, da je X lokalni martingal in izrazite $\langle X\rangle$.

Rešitev: Po Itôvi formuli in pravilu za odvajanje produkta je

$$dX_t = 3B_t^2dt + 3B_tdt - 3B_tdt - 3tdB_t = 3(B_t^2 - t)dB_t\,.$$

Sledi, da je X lokalni martingal in je $d\langle X\rangle_t = 9(B_t^2 - t)^2dt$.

b. (5) Pokažite, da sta procesa

$$M_t = e^{\frac{9\lambda^2}{2}\int_0^t (B_s^2 - s)^2ds}\cos(\lambda X_t) \quad \text{in} \quad N_t = e^{\frac{9\lambda^2}{2}\int_0^t (B_s^2 - s)^2ds}\sin(\lambda X_t)$$

lokalna martingala.

Rešitev: Ker je $\langle \lambda X\rangle_t = 9\lambda^2\int_0^t (B_s^2 - s)^2ds$, je za proces $R = \lambda X$

$$\begin{aligned} dM_t &= d(e^{\langle R\rangle_t/2}\cos(R_t)) \\ &= M_t\cdot d\langle R\rangle_t/2 - e^{\langle R\rangle_t/2}\sin(R_t)dR_t - M_td\langle R\rangle_t/2 \\ &= -N_tdR_t\,. \end{aligned}$$

Ker je R lokalni martingal, je torej tudi M lokalni martingal kot stohastični integral zveznega, prilagojenega procesa. Za N računamo podobno.

c. (5) Naj bo

$$T = \inf\{t \geq 0\colon 9\int_0^t (B_s^2 - s)^2ds > 1\}\,.$$

Utemeljite, da je

$$E[M_T] = 1 \quad \text{in} \quad E[N_T] = 0\,.$$

Privzemite, da je $P(T < \infty) = 1$.

Rešitev: Ustavljen lokalni martingal je lokalni martingal. Procesa M^T in N^T sta torej omejena lokalna martingala in zato omejena martingala. Po izreku o opcijskem ustavljanju je

$$E[M_0] = E[M_{t\wedge T}] \qquad \textit{in} \qquad E[N_0] = E[N_{T\wedge t}]$$

za vsak t. Ko $t \to \infty$, je $M_{T\wedge t} \to M_T$ in podobno za N. Ker je $M_{t\wedge T}$ omejen, sledi trditev z uporabo izreka o dominirani konvergenci. Argument za N je podoben.

d. (5) Kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke X_T?

Rešitev: Iz prejšnje točke sledi

$$\cos(\lambda X_T) = e^{-\lambda^2/2} \quad \textit{in} \quad \sin(\lambda X_T) = 0$$

za vse realne λ, zato $X_T \sim N(0,1)$.

2. (20) Naj bo B standardno Brownovo gibanje. Definirajte

$$\mathcal{E}(B)_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t}$$

in

$$Y_t = \mathcal{E}_t(B) \int_0^t \mathcal{E}(B)_s^{-1} \left(B_s dB_s - B_s ds\right) .$$

a. (10) Pokažite, da je

$$dY_t = (Y_t + B_t) dB_t .$$

Rešitev: Najprej opazimo, da je

$$d\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(X)_t dB_t .$$

Formula za stohastično odvajanje produkta nam da

$$\begin{aligned} dY_t &= \mathcal{E}(X)_t dB_t \int_0^t \mathcal{E}(X)_t^{-1} \left(B_t dB_t - B_t dt\right) + \mathcal{E}(X)_t \mathcal{E}(X)_t^{-1} \left(B_t dB_t - B_t dt\right) \\ &\quad + B_t dt \\ &= Y_t dB_t + B_t dB_t . \end{aligned}$$

Pri tem smo kvadratično variacijo izračunali z upoštevanjem, da ima eden od procesov omejeno totalno variacijo.

b. (10) Pokažite, da Y ustreza enačbi

$$Y_t = \int_0^t Y_s dB_s + \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t .$$

Rešitev: Ker je $Y_0 = 0$, dobimo

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_0^t dY_s \\ &= \int_0^t Y_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t (2B_s dB_s + ds - ds) \\ &= \int_0^t Y_s dB_s + \frac{1}{2} \left(B_t^2 - t\right) . \end{aligned}$$

Opazili smo, da je $2B_t dB_t + dt$ diferencial procesa B^2.

3. (20) Naj bo $X_t = \int_0^t W_s^2 dW_s$, $t \geq 0$.

a. Izrazite proces X s pomočjo procesov $Y_t = W_t^3$, $t \geq 0$, in $Z_t = \int_0^t W_s ds$, $t \geq 0$.

Rešitev:

b. Izračunajte $\mathrm{cov}(Y_t, Z_t)$ ob upoštevanju dejstva, da je $Z_t \stackrel{(d)}{=} \mathrm{N}(0, t^3/3)$.

Rešitev:

c. Izračunajte $\langle Y, Z \rangle_t$?

Rešitev:

4. (25) Predpostavite Black-Sholesov model za gibanje cene temelja S:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t} .$$

Vrednost opcije v času dospetja T naj bo dana z

$$V_T = \left(\sqrt{S_{T/2} \cdot S_T} - K\right)_+ .$$

Privzemite, da je jakost obrestne mere konstantno r in volatilnost konstantno σ. Kot znano privzemite, da je za $Z \sim \mathrm{N}(a, b^2)$ in $c > 0$

$$E\left[\left(e^Z - c\right)_+\right] = e^{a + \frac{b^2}{2}} \Phi\left(\frac{a + b^2 - \log c}{b}\right) - c\Phi\left(\frac{-\log c + a}{b}\right) ,$$

kjer je $\Phi(z)$ porazdelitvena funkcija standardizirano normalne porazdelitve.

a. (15) Izračunajte V_0.

Rešitev: vemo, da je

$$V_0 = E_Q\left(\tilde{V}_T\right) .$$

Pod Q je

$$S_t = S_0 e^{rt + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t} ,$$

torej je

$$V_T = \left(S_0 e^{3rT/4 + \sigma(W_T + W_{T/2})/2 - \frac{3\sigma^2}{8}} - K\right)_+ .$$

in

$$\tilde{V}_T = \left(e^{\log S_0 - rT/4 + \sigma(W_T + W_{T/2})/2 - \frac{3\sigma^2 T}{8}} - e^{-rT} K\right)_+ .$$

Iz lastnosti Brownovega gibanja sledi, da je vsota $W_{T/2} + W_T$ normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo 0*, iz lastnosti* $\mathrm{cov}(W_s, W_t) = \min(s, t)$ *pa sledi, da je*

$$\mathrm{var}\left(W_{T/2} + W_T\right) = 5\sigma^2 T/2 .$$

V eksponentu v $\tilde{V}_T$ imamo normalno slučajno spremenljivko s pričakovano vrednostjo $a = \log S_0 - rT/4 - \frac{3\sigma^2}{8} T$ in varianco $b^2 = 5\sigma^2 T/8$. Ceno V_0 preberemo iz formule v navodilu s $c = e^{-rT} K$.

b. (10) Navedite $V_{T/2}$ v odvisnosti od $S_{T/2}$.

Rešitev: vemo, da je pod Q

$$\tilde{V}_{T/2} = E_Q\left(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_{T/2}\right) .$$

Prepišemo

$$\tilde{V}_T = \left(e^{\log S_0 - rT/4 + \sigma^2 (W_T - W_{T/2})/2 + \sigma W_{T/2} - \frac{3\sigma^2 T}{8}} - e^{-rT} K\right)_+ .$$

Prepišemo še enkrat v

$$\tilde{V}_T = \left(e^{\log \tilde{S}_{T/2} - rT/4 + \sigma(W_T - W_{T/2})/2 - \frac{\sigma^2 T}{8}} - e^{-rT} K \right)_+ .$$

Slučjna spremenljivka $W_T - W_{T/2}$ *je pod* Q *neodvisna of* $\mathcal{F}_{T/2}$*, porazdelitev pa je normalna s pričakovano vrednostjo* 0 *in varianco* $T/2$*. Pri računanju pogojne pričakovane vrednosti lahko obravnavamo* $\tilde{S}_{T/2}$ *kot konstant0. Pogojno pričakovano* $\tilde{V}_{T/2}$ *vrednost preberemo iz formule v besedilu naloge s parametri* $a = \log \tilde{S}_{T/2} - rT/4 - \frac{\sigma^2 T}{8}$, $b^2 = \sigma^2 T/8$ *in* $c = e^{-rT} K$.