1. Merskoteoretične osnove verjetnosti

1.1. σ-algebre, mere.

Teorija mere se je razvila iz želje po bolj abstraktnem in fleksibilnem integralu. Ruski matematik A. N. Kolmogorov je v abstraktnem integralu in merah spoznal pravi okvir za verjetnost.

Definicija: Naj bo S neprazna množica. Družino $\mathcal{F}$ podmnožic imenujemo σ-algebra, če velja:

(i) $S \in \mathcal{F}$

(ii) če je $A \in \mathcal{F}$, je $A^c = S \setminus A \in \mathcal{F}$.

(iii) če je $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ števna družina podmnožic $A_i \in \mathcal{F}$, je

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}.$$

Opomba: Iz definicije sledi, da je $\mathcal{F}$ zaprta za števne preseke.

Primeri:

(i) Tipično bodo σ-algebre definirane z generatorji. Vzemimo recimo $\mathbb{R}^n$ z evklidsko topologijo $\mathcal{T}$. Družina σ-algebr, ki vsebujejo $\mathcal{T}$ je neprazna (recimo družina vseh podmnožic $\mathbb{R}^n$). Ker je poljuben presek σ-algeber spet σ-algebra, obstaja najmanjša σ-algebra v $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje $\mathcal{T}$. Tej σ-algebri rečemo σ-algebra Borelovih množic in označimo z $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Rečemo, da $\mathcal{T}$ generira Borelovo σ-algebro.

(ii) Naj bo $\mathcal{S}_1$ σ-algebra na prostoru S_1 in $\mathcal{S}_2$ σ-algebra na prostoru S_2. Definirajmo družino $\mathcal{A} = \{A \times B : A \in \mathcal{S}_1, B \in \mathcal{S}_2\}$ vseh „pravokotnikov". Spet obstaja najmanjša σ-algebra, ki vsebuje družino $\mathcal{A}$. Rečemo ji produktna σ-algebra in označimo s $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$.

(iii) Vzemimo $S = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Naj bo $\mathcal{A}$ družina vseh množic oblike

$$A = \{i_1\} \times \{i_2\} \times \cdots \times \{i_n\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots$$

Takim množicam rečemo cilindrične. Obstaja najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse cilindrične množice. V verjetnosti bo zanimiva točno ta σ-algebra, ki jo označimo z $\sigma(\mathcal{A})$.

Opomba: Množice v σ-algebri bodo tiste, ki jim bomo dodelili „ploščino".

V skladu z intuicijo elementom σ-algebre dodelimo mero, ki se obnaša kot „ploščina".

Definicija: Pozitivna mera na merljivem prostoru $(S, \mathcal{F})$ je funkcija

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$$

z lastnostmi:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) če so $A_1, A_2, \ldots$ disjunktni elementi $\mathcal{F}$, je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Opombe:

(i) če je $\mu(S) < \infty$, rečemo, da je mera končna.

(ii) če je $\mu(S) = 1$, bomo govorili o verjetnostnih merah.

Kako pa vemo, da kakšna mera sploh obstaja? To vprašanje ni preprosto in nanj odgovarja izrek o razširitvi, ki ga bomo navedli v nadaljevanju. Tukaj si oglejmo samo dva primera:

(i) V $\mathbb{R}^n$ je smiselno podeliti kvadrom $Q = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ mero $\lambda(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Vemo, da je najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse kvadre kot Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Dodelitev mere kvadrom se da razširiti na vse množice $B(\mathbb{R}^n)$, tako da je ustreženo definiciji mere. Dobljeni meri rečemo Lebesgueova mera na $\mathbb{R}^n$.

(ii) Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nenegativna, desno zvezna nepadajoča funkcija. Intervalom $(a, b]$ za $a < b$ dodelimo mero

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$$

Najmanjša σ-algebra, ki vsebuje polodprte intervale je $B(\mathbb{R})$. Iz izreka o razširitvi bo sledilo, da obstaja enolično določena mera μ_F na $B(\mathbb{R})$, ki na polodprtih intervalih sovpada z začetno dodelitvijo.

Poseben primer dobimo, če je F_X porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X. Pripada ji enolično določena mera μ_X na $B(\mathbb{R})$. Ta mera bo porazdelitev X. Tako je porazdelitev končno dobila matematično podobo in se utelesila v meri.

(iii) Naj bo $S = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Vsaki cilindrični množici

$$\{i_1\} \times \{i_2\} \times \cdots \times \{i_n\} \times \{0,1\} \times \cdots$$

podelimo mero

$$\prod_{k=1}^{n} p^{i_k}(1-p)^{1-i_k}.$$

Intuicija? Metanje kovanca, meti so neodvisni in verjetnost grba je p.

Predpis lahko razširimo v mero na σ-algebri, ki jo definirajo cilindrične množice. Tako dobimo matematično trden okvir za neskončno zaporedje metov kovancev. S tem bodo izjave kot „delež grbov konvergira proti p" postale smiselne.

Teorija mere se je razvila iz želje po bolj elegantnem integriranju. Integriramo lahko funkcije z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Lebesgueova ideja, da aproksimiramo funkcijo s „stopničasto". Če je $(S, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $f : S \to \mathbb{R}$, bi najmanj želeli, da je $f^{-1}((a,b])$ merljiva množica.

Ampak, zaradi lastnosti inverzne preslikave to pomeni, da je $f^{-1}(A)$ merljiva za vsa $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

To nas napelje na naslednjo abstraktno definicijo.

<u>Definicija</u>: Naj bosta $(S, \mathcal{S})$ in $(T, \mathcal{T})$ merljiva prostora. Funkcija $f : S \to T$ je merljiva, če je $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}$ za vsak $A \in \mathcal{T}$.

<u>Komentarji</u>:

(i) Ali obstajajo (zanimive) nemerljive funkcije. Obstajajo, vendar na podlagi aksioma izbire.

(ii) Slučajne spremenljivke in slučajni vektorji so merljive preslikave iz $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ v

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ali $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Pri tem je P verjetnostna mera na $\mathcal{F}$.

(iii) Če je v definiciji $\mathcal{T}$ generiran z odprtimi množicami neke topologije $\mathcal{T}$, je f merljiva, če je $f^{-1}(U)$ merljiva za vsako odprto množico U. V $\mathbb{R}$ lahko gremo še dlje in zahtevamo, da je $f^{-1}((-\infty, a])$ merljiva za vsak $a \in \mathbb{R}$.

Katere funkcije pa so merljive? Zvezne, stopničaste, nepadajoče, ...

Naslednje vprašanje je glede konvergence. Zaenkrat lahko govorimo samo o konvergenci po točkah. Naj bo $(S, \mathcal{S})$ merljiv prostor in $f_n : S \to \mathbb{R}$ zaporedje merljivih funkcij. Naj bo $f : S \to \mathbb{R}$ merljiva. Množico $A = \{x \in S : f_n(x) \to f(x), \text{ ko } n \to \infty\}$ lahko zapišemo kot

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{m}\}$$

torej je A merljiva množica.

<u>Definicija</u>: Zaporedje merljivih funkcij f_n konvergira proti merljivi funkciji f <u>skoraj povsod</u>, če je $\mu(A^c) = 0$.

Kaj pa obratno? Če f_n konvergirajo proti f skoraj povsod, ali je f merljiva?

Lema 1.1: Naj bo f_n zaporedje merljivih funkcij. Potem sta $\limsup_{n\to\infty} f_n$ in $\liminf_{n\to\infty} f_n$ merljivi funkciji.

Dokaz: Bralec.

Korolar 1.2: Če f_n konvergirajo skoraj povsod po točkah k f, potem je f merljiva.

Dokaz: Bralec.

1.2. Abstraktni Lebesgueov integral

Izvorna ideja definicije abstraktnega integrala je, da funkcije aproksimiramo s stopničastimi funkcijami.

Naj bo $f : (S, \mathcal{S}) \to \mathbb{R}_+$ merljiva.

Definicija: Stopničaste funkcije so oblike

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{A_k}(x),$$

kjer so c_k konstante, A_k pa merljive množice.

Če je μ mera na $\mathcal{S}$, je za stopničasto funkcijo definicija integrala kar

$$\int_S s(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k)$$

Opomba: vedno lahko privzamemo, da so konstante c_k različne, množice $A_1, \dots, A_n$ pa disjunktne.

Zaenkrat predpostavimo $c_k \geq 0$.
Vsota je tako lahko $+\infty$.

Za splošno merljivo funkcijo $f \geq 0$ lahko najdemo zaporedje merljivih stopničastih funkcij s_n z $s_n \to f$ za vse $x \in S$.
Poleg tega lahko izberemo s_n take, da so naraščajoče.

Smiselno je definirati integral kot limito.

<u>Definicija</u>: Za merljivo nenegativno funkcijo $f: S \to [0,\infty]$ definiramo

$$\int_S f(x)\,d\mu = \sup\left\{ \int_S s(x)\,d\mu : s \text{ stopničasta z } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Opombe:

(i) Definicija enolično določa integral, ki je lahko tudi ∞.

(ii) iz definicije ni povsem jasno, da definira integral, ki ima lastnosti linearnosti in monotonosti, vendar so dokazi precej elementarni, posebej monotonost.

(iii) Za slučajne spremenljivke bo

$$\int_\Omega X(\omega)\,dP = E(X).$$

S tem bo pričakovana vrednost postala abstraktni integral in podedovala vse lastnosti integralov.

Prva posledica te nove definicije integrala je

Izrek 1.3 (izrek o monotoni konvergenci, B. Levi) Naj bo f_n nepadajoče zaporedje nenegativnih funkcij. Potem je

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu$$

Dokaz:

Ideja: Če je $f_n(x) = \chi_{A_n}(x)$ za $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\bigcup_n A_n}(x)$.

Levijev izrek v tem primeru pravi

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

kar sledi iz definicije mere (bralec).

Označimo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Po predpostavki je $f_n \leq f$ zato

$$\int f_n(x)\,d\mu \leq \int f(x)\,d\mu.$$ Po drugi strani obstaja stopnjasta funkcija $s(x)$, da je $s \leq f$ in

$$\int s(x)\,d\mu \geq \int f(x)\,d\mu - \varepsilon$$

(recimo najprej, da je $\int f(x)\,d\mu < \infty$).

Recimo $s(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \chi_{A_j}(x)$. Za $\beta < 1$. Za vsak fiksen A_j je za $A_j^n = \{f_n(x) > \beta f(x)\} \uparrow A_j$, ko $n \to \infty$.

$$\int f_n(x)\,d\mu \geq \sum_{j=1}^{n} \beta c_j \mu(A_j^n)$$

$$\downarrow$$

$$\mu(A_j)$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,d\mu \geq \beta\left(\int f(x)\,d\mu - \varepsilon\right).$$

β in ε sta poljubna, zato velja tudi obratna neenakost.

Za $\int f(x)\,d\mu = \infty$, je dokaz podoben.

Opombi:

(i) Iz tega izreka hitro sledi, da je $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu$, če so f_n nenegativne.

(ii) Če je μ Lebesgueova mera na $[a,b]$, dobimo izrek, ki nima analogije v Analizi 2.

Vprašanje: Ko smo definirali integral, smo predpostavili, da je f merljiva. Zakaj? Sicer ne moremo trditi, da obstaja maksimalna stopničasta funkcija s z $s \le f$.

Iz definicij sledi, da obstaja za merljivo funkcijo $f \geq 0$ zaporedje nenegativnih, naraščajočih stopničastih funkcij s_n, da $s_n \uparrow f$ za vse $x \in S$.

Iz definicij sledita še naslednji trditvi.

<u>Lema 1.4</u>: Če je $\alpha \geq 0$ in $f \geq 0$, je

$$\int \alpha f(x)\, d\mu = \alpha \int f(x)\, d\mu .$$

<u>Dokaz</u>: (bralec)

<u>Lema 1.5</u> (Fatou): Naj bodo f_n nenegativne funkcije. Velja

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu .$$

Dokaz: Naj bo $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ in $g_n = \inf_{j\geq n} f_j$. Velja, da so f, g_n merljive in je g_n naraščajoče zaporedje z $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ (Analiza 1). Izrek sledi iz izreka o monotoni konvergenci.

V splošnem naj bo f merljiva funkcija. Zapišemo

$$f^+ = \max(0, f)$$
$$f^- = \max(0, -f).$$

Velja $f = f_+ - f_-$ in $|f| = f_+ + f_-$.

Rečemo, da integral

$$\int f(x)\, d\mu \text{ obstaja, če}$$

je $\int f^+(x)\, d\mu < \infty$, $\int f^-(x)\, d\mu < \infty$

in definiramo

$$\int f(x)\,d\mu = \int f^+(x)\,d\mu - \int f^-(x)\,d\mu.$$

<u>Opomba</u>: Integral obstaja, če in samo če obstaja integral $\int |f(x)|\,d\mu$.

<u>Izrek 1.6</u>: Naj obstajata integrala $\int f(x)\,d\mu$ in $\int g(x)\,d\mu$. Potem obstaja $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,d\mu$ in velja

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,d\mu$$

$$= \alpha \int f(x)\,d\mu + \beta \int g(x)\,d\mu.$$

<u>Dokaz</u>: (bralec).

Primer izreka, ki ga v okviru Riemannovega integrala ne moremo pokazati:

Naj bo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva na $[a,b]$ (v robnih točkah obstajata levi in desni odvod). Predpostavite, da za F' (torej je F' merljiva) velja, da integral $\int |F'(x)|dx$ obstaja. Potem velja

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

W. Rudin, RCA, str. 168.

<u>Izrek 1.7</u>: (Izrek o dominirani konvergenci). Naj bo $g \geq 0$ merljiva z $\int g(x)\,d\mu < \infty$. Naj bo $|f_n| \leq g$ zaporedje merljivih funkcij z $f_n \to f$ skoraj povsod. Potem je

$$\int f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,d\mu$$

<u>Dokaz</u>: Dokazali bomo še nekoliko več.

Ocenimo

$$\int 2g(x)\, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|)\, d\mu$$

(Fatou)

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int (2g - |f_n - f|)\, d\mu$$

$$= 2\int g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu$$

Sledi $\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$.

To pomeni, ker očitno velja trikotniška neenakost, da

$$\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu.$$

1.3. Porazdelitve in pričakovane vrednost

Kaj pa vse to pomeni za verjetnost? Verjetnost „se dogaja" na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kjer je $\mathcal{F}$ σ-algebra, P pa mera + $P(\Omega) = 1$.

Slučajne spremenljivke so merljive funkcije $X : \Omega \to \mathbb{R}$, vektorji je merljive funkcije v $\mathbb{R}^n$, obenem merljive glede na Borelovo σ-algebro na $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{R}^n$.

Definiramo

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP$$

v smislu abstraktnega Lebesgueovega integrala. Iz tega takoj sledi linearnost pričakovane vrednosti.

Kaj pa je porazdelitev X?

Na 1. stopnji smo rekli, da je porazdelitev dana z $P(X \in A)$ za „ustrezne" množice A.

Te bodo zdaj Borelove. Predpis

$A \longmapsto P(X \in A)$ definira nenegativno funkcijo na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Če so $A_1, A_2, \ldots$ disjunktne, je

$$P(X \in \bigcup_j A_j) = \bigcup_j P(X \in A_j),$$ kjer

so praslike tudi disjunktne.

Predpis je zaradi tega, ker je P mera tudi mera.

<u>Definicija</u>: Porazdelitev slučajne spremenljivke X je mera na μ_X na $B(\mathbb{R})$ dana z

$$\mu_X(A) = P(X \in A).$$

<u>Opomba</u>: Popolnoma enaka definicija velja za $\mathbb{R}^n$ ali bolj splošno, če je $X: \Omega \to S$ in je S merljiv prostor.

Definiciji:

(i) X je diskretna slučajna spremenljivka, če ima samo števno mnogo vrednosti. V tem primeru obstaja števna množica $D \subseteq \mathbb{R}$ z $\mu_X(D) = 1$.

(ii) X je zvezna slučajna spremenljivka, če obstaja nenegativna merljiva funkcija $f_X : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ z

$$\int_A f_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\chi_A(x)\,dx$$

$$= \mu_X(A).$$

Rečemo, da ima mera μ_X gostoto glede na Lebesgueovo mero. Gostota je določena do množice z mero 0 natančno.

Izrek 1.7: Če obstaja eden od integralov $E(X)$ ali $\int |x| \, d\mu_X$, obstaja tudi drugi in je

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu_X.$$

Dokaz: Predpostavimo, da je X nenegativna. Definiramo

$$X_n = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} 1\left(X \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right).$$

Velja $X_n \uparrow X$. Poleg tega je X_n stopničasta, zato je

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} \mu_X\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right).$$

Desna stran je enaka integralu funkcije $\sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)}(x) \uparrow x$, ko $n \to \infty$. Trditev sledi iz izreka o monotoni konvergenci.

Definicija: Slučajne spremenljivke X_n konvergirajo skoraj gotovo proti slučajni spremenljivki X, če velja

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega),\ n \to \infty\}) = 1.$$

Oznaka: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} X$.

Dodatek: Če je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova merljiva, je tudi $f \circ X$. Podobno kot izrek 1.7 dokažemo, da $E[f(X)]$ obstaja, če in samo če obstaja $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, d\mu$. V tem primeru je

$$E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu$$

Opomba o oznakah: V verjetnosti pogosto pišemo

$$\int f(x)\,\mu(dx) \quad \text{namesto}$$

$$\int f(x)\,d\mu \quad \text{ali} \quad \int f(x)\,d\mu(x).$$

Primera, kako stvari postanejo lepši in preglednejše:

(i) Naj bo $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ naraščajoča nenegativna funkcija. Recimo $\varphi(x) > 0$ za $x > 0$. Privzemimo $X \geq 0$.

$$P(X \geq x) = \mu_X([x, \infty))$$

$$= \int_{[x,\infty)} \mu_X(du)$$

$$\le \int_{[x,\infty)} \underbrace{\frac{\varphi(u)}{\varphi(x)}}_{\le 1} \mu_X(dx)$$

$$= \frac{1}{\varphi(x)} \int_{[0,\infty)} \varphi(u) \mu_X(du)$$

$$= \frac{1}{\varphi(x)} E[\varphi(X)].$$

Za $\varphi(x) = x$ dobimo neenakost Markova, za $\varphi(x) = x^2$ pa Čebiševa.

(ii) Funkcija $x \mapsto P(X \geq x)$ je nenaraščajoča, zato merljiva. Recimo, da je $X \geq 0$. Računamo

$$\int_{[0,\infty)} x\, P(X \geq x)\, dx$$

$$= \int_{[0,\infty)} x \left(\int_{[x,\infty)} \mu_X(du) \right) dx$$

$$= \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} x\, \mathbb{1}(u \geq x)\, (\mu_X \times \lambda)(du, dx)$$

$$= \int_{[0,\infty)} \mu_X(du) \cdot \int_{[0,u]} x \cdot dx$$

$$= \int_{[0,\infty)} \frac{u^2}{2}\, \mu_X(du)$$

$$= \frac{1}{2} E(X^2).$$

1.4. Produktne mere

Recimo, da imamo mero μ na prostoru $(S, \mathcal{S})$ in mero ν na prostoru $(T, \mathcal{T})$. Povedali smo, da lahko definiramo produktno σ-algebro $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ na $S \times T$ kot najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje vse pravokotnike $A \times B$ z $A \in \mathcal{S}$ in $B \in \mathcal{T}$. Želimo definirati tudi produktno mero $\mu \times \nu$. Ideja bi bila, da je

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Mero moramo razširiti na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Lahko uporabimo izrek o razširitvi, vendar bomo raje ubrali drugo pot, ki nam bo dala tudi Fubinijev izrek.

Potrebujemo čudovito lemo.

Definicija: Družina podmnožic $\mathcal{P}$ množice S je π-sistem, če je zaprta za preseke.

Opomba: Vedno lahko dodamo S in $\emptyset$.

Definicija: Družina podmnožic S $\mathcal{L}$ je λ-sistem, če velja:

(i) $S \in \mathcal{L}$

(ii) če je $A, B \in \mathcal{L}$ in $A \subset B$, je $B \setminus A \in \mathcal{L}$.

(iii) če so $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L}$ disjunktni, je $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{L}$.

Izrek 1.8: (Dynkinova lema).
Če je $\mathcal{L}$ λ-sistem, ki vsebuje π-sistem $\mathcal{P}$, potem $\mathcal{L}$ vsebuje tudi $\sigma(\mathcal{P})$.

Opomba: $\sigma(\mathcal{P})$ je najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{P}$.

Dokaz: ker je presek λ-sistemov spet λ-sistem in obstaja vsaj en λ-sistem, ki vsebuje $\mathcal{P}$, obstaja najmanjši λ-sistem $\tilde{\mathcal{L}}$, ki vsebuje. Opazimo, da je vsak λ-sistem, ki je tudi π-sistem σ-algebra. Dovolj bo, da dokažemo, da je $\tilde{\mathcal{L}}$ π-sistem, ker to implicira $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \tilde{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}$.

Definirajmo za $A \subseteq S$

$$\mathcal{G}_A = \{ B \subseteq S : A \cap B \in \tilde{\mathcal{L}} \}.$$

Če je $A \in \tilde{\mathcal{L}}$, je družina $\mathcal{G}_A$ λ-sistem, kar zlahka preverimo. Poleg tega $\mathcal{G}_A$ vsebuje $\mathcal{P}$, če je $A \in \mathcal{P}$.

Če je torej $A \in \mathcal{P}$, potem zaradi minimalnosti velja $\mathcal{G}_A \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$. Če je torej $A \in \mathcal{P}$ in $B \in \tilde{\mathcal{L}}$, sledi $A \cap B \in \tilde{\mathcal{L}}$. Če ta razmislek obrnemo, iz $A, B \in \tilde{\mathcal{L}}$ sledi $A \cap B \in \tilde{\mathcal{L}}$, zato je $\tilde{\mathcal{L}}$ π-sistem.

Primera uporabe

(i) Naj bo $\mathcal{P}$ družina vseh končnih unij intervalov oblike $(a,b]$ v $\mathbb{R}$. Lahko privzamemo, da so intervali disjunktni. Ta družina je π-sistem, ki generira $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Naj bosta μ in ν meri, za kateri je $\mu((a,b]) = \nu((a,b])$ za $a < b$. Meri se potem ujemata tudi na $\mathcal{P}$. Ampak, družina

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mu(A) = \nu(A)\}$$

je λ-sistem, či sta μ in ν končni.
Sledi, da $\mathcal{L}$ vsebuje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, kar pomeni, da ista μ in ν enaki.
Torej je mera μ, za katero je
$\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ za $a < b$ ena sama!

Podobno velja v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Recimo, da imamo meri ρ in $\tilde{\rho}$, za kateri je na $S \times T$ $\rho(A \times B) = \tilde{\rho}(A \times B)$.

Družina končnih unij disjunktnih pravokotnikov $A_i \times B_i$ je π-sistem, če sta $\rho, \tilde{\rho}$ končni. Ker ta družina generira $S \times T$, se meri ujemata na na $S \times T$.

Zakaj? Bralec.

Če obstaja mera $\mu \times \nu$, je enolično določena. Ideja: naj bo $C \subseteq S \times T$, $C \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ in predpostavimo, da sta μ in ν končni. Rečemo

$$(\mu \times \nu)(C) = \int_S \nu(C_x)\,\mu(dx),$$

kjer je $C_x = \{ y : (x,y) \in C \}$.

Pri tem imamo tehnični težavi:

(i) C_x mora biti merljiva.

(ii) $x \longmapsto \nu(C_x)$ mora biti merljiva.

Prva težavica ni huda, druga pa nekoliko hujša. Obe reši Dynkinova lema. Vzemimo za $\mathcal{P}$ disjunktne unije $\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)$.

Družina $\{ C \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} : C_x \text{ merljiva} \}$ vsebuje $\mathcal{P}$, poleg tega pa je λ-sistem in zato vsebuje $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$.

Za drugo definiramo

$$\mathcal{L} = \{ C \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} : x \longmapsto \nu(C_x)$$
$$\text{merljiva} \}.$$

Spet je $\mathcal{L}$ λ-sistem, kot hitro preverimo, zato $\mathcal{L}$ vsebuje $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$.

<u>Opomba</u>: Navedeno velja za μ, ν končni. Ostalo kasneje.

Zdaj lahko definiramo

$$(\mu \times \nu)(C) = \int_S \nu(C_x)\,\mu(dx).$$

Če so $C_1, C_2, \ldots$ disjunktne, je

$$(\mu \times \nu)(C) = \int_S \nu\big((\cup_i C_i)_x\big)\,\mu(dx)$$

$$= \int_S \sum_i \nu((C_i)_x)\,\mu(dx)$$

$$= \sum_i \int_S \nu((C_i)_x)\,\mu(dx)$$

$$= \sum_i (\mu \times \nu)(C_i)$$

po izreku o monotoni konvergenci.

Res smo definirali mero! Poleg tega je taka razširitev ena sama.

<u>Izrek 1.9</u>: (Fubini) Naj bosta μ in ν končni meri in $f : S \times T \to \mathbb{R}_+$ nenegativna merljiva funkcija. Potem velja

$$\int_{S\times T} f(x,y)\,(\mu\times\nu)(dx,dy)$$

$$= \int_S \mu(dx) \cdot \int_T f(x,y)\,\nu(dy).$$

<u>Opombi</u>:

(i) V načelu moramo dokazati merljivost $y \longmapsto f(x,y)$ za fiksen x in merljivost $x \longmapsto \int_T f(x,y)\,\nu(dy)$, vendar to sledi iz opomb pri konstrukciji $\mu\times\nu$.

(ii) Fubinijevega izreka v resnici ni.

Trditev je vgrajena v konstrukcijo $\mu \times \nu$.

<u>Dokaz</u>: Obstaja zaporedje stopničastih funkcij $s_n \uparrow f$. Za stopničaste funkcije trditev izreka velja po konstrukciji, torej je

$$\int_{S\times T} s_n(x,y)\,(\mu\times\nu)(dx,dy)$$

$$= \int_S \mu(dx) \int_T s_n(x,y)\,\nu(dy)$$

Ko $n \to \infty$ leva stran po izreku o monotoni konvergenci konvergira proti $\int_{S\times T} f(x,y)\,(\mu\times\nu)(dx,dy)$.

Enako velja za desno stran.

S tem je enakost potrjena.

Opomba: V okviru Riemannovega integrala funkcija $y \mapsto f(x,y)$ ni nujno Riemannovo integrabilna.

Posledica 1.10: Naj bosta μ, ν končni. Če obstaja eden od treh integralov

$$\int f(x,y)(\mu \times \nu)(dx, dy)$$

$$\int_S \mu(dx) \int_T f(x,y)\, \nu(dy)$$

$$\int_T \nu(dy) \int_S f(x,y)\, \mu(dx)$$

obstajata tudi ostala dva in so vsi trije enaki.

Dokaz: Bralec.

Opomba: Obstoj tukaj razumemo, da je integral absolutne vrednosti $< \infty$.

Definicija: Mera μ na $(S, \mathcal{S})$ je σ-končna, če obstaja zaporedje množic $A_1, A_2, \ldots$ z $\mu(A_k) < \infty$ in $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Fubinijeva konstrukcija in Fubinijev izrek veljata v nespremenjeni obliki, če namesto končnosti μ in ν predpostavljamo σ-končnost. Primeri so Lebesgueova mera na $\mathbb{R}^n$ ali Lebesgue-Stieltjesove mere na $\mathbb{R}$.

Stik z verjetnostjo?

Naj bosta X, Y slučajni spremenljivki:

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (S, \mathcal{S})$$

$$Y : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (T, \mathcal{T}).$$

Slučajni vektor (X,Y) je preslikava

$$(X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

iz Ω v $S\times T$. Zlahka se prepričamo, da je (X,Y) merljiva preslikava iz Ω v $S\times T$, če in samo če sta X in Y merljivi vsaka zase. Porazdelitev vektorja (X,Y) je mera $\mu_{X,Y}$ na $(S\times T, \mathcal{S}\times\mathcal{T})$.

<u>Definicija</u>: Slučajni spremenljivki X, Y sta neodvisni, če je

$$P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$$

za vsaka $A\in\mathcal{S}$ in $B\in\mathcal{T}$.

Če sta X, Y neodvisni, je

$$\mu_{X,Y}(A\times B) = \mu_X(A)\cdot\mu_Y(B).$$

A vendar to pomeni $\mu_{X,Y} = \mu_X \times \mu_Y$.

Izrek 1.11: Slučajni spremenljivki X, Y z vrednostmi v S oziroma T sta neodvisni, če in samo če je

$$\mu_{X,Y} = \mu_X \times \mu_Y .$$

Dokaz: Smo že.

Primer: Če je $H(\omega, t)$ merljiva na $\Omega \times [a,b]$ glede na produktno σ-algebro in obstaja ali

$$E\left[\int_a^b H(\omega,t)\, dt \right]$$

ali

$$\int_a^b E[H(\omega,t)]\, dt ,$$

potem obstaja tudi drugi integral in sta integrala enaka.

Primer: Naj bosta X, Y realni z $E|X| < \infty$ in $E|Y| < \infty$. Če sta X, Y neodvisni, je tudi $E|XY| < \infty$ in je $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Računamo

$$
\begin{aligned}
E(|XY|) &= \int |xy| \, \mu_{X,Y}(dx, dy) \\
&= \int |xy| (\mu_X \times \mu_Y)(dx, dy) \\
&= \int |x| \mu_X(dx) \cdot \int |y| \mu_Y(dy) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Enakost $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ sledi iz Fubinijevega izreka.

1.5. $\mathcal{L}^p$ prostori

Naj bosta $f, g : S \to \mathbb{R}$ funkciji, za kateri je

$$\int_S |f|^p \mu(dx) < \infty \quad \text{in}$$

$$\int_S |g|^p \mu(dx) < \infty .$$

Za $p \geq 1$ je zaradi konveksnosti

$$\left| \frac{f(x) + g(y)}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} |f|^p + \frac{1}{2} |g|^p ,$$

zato je

$$\int_S |f+g|^p \mu(dx) < \infty .$$

Funkcije $f : S \to \mathbb{R}$, za katere je $\int_S |f|^p d\mu < \infty$ so vektorski prostor $\mathcal{L}$.

Če so $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ realna števila in p, q števili z $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ veljata neenačbi

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

(Hölder)

in

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p}$$

(Minkowski).

Če uporabimo ti neenačbi na stopničastih funkcijah s_1 in s_2, dobimo

$$\left| \int_S s_1 \cdot s_2 \, d\mu(dx) \right|$$

$$\leq \left(\int_S |s_1(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_S |s_2(x)|^q \right)^{1/q}$$

<u>Opomba</u>: za $p = 1$ neenačba očitno velja

in

$$\left(\int_S |s_1+s_2|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_S |s_1|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_S |s_2|^p\right)^{1/p}$$

Videti je, da je $\|f\|_p = \left(\int_S |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ norma na vektorskem prostoru. Vendar ne sledi $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f \equiv 0$, ker je lahko $f \neq 0$ na množici z mero 0. Zato se odločimo in gledamo ekvivalenčne razrede

$[f] = \{ g \in \mathcal{L} : f(x) \neq g(x)$ za x na množici z mero $0\}$.

Definiramo

$$\lambda[f] = [\lambda f] \quad \text{in}$$

$$[f]+[g] = [f+g].$$

Definiramo

$$\| [f] \|_p = \| f \|_p .$$

Na tej množici ekvivalenčnih razredov imamo vektorsko strukturo in normo.

<u>Definicija</u>: Množici ekvivalenčnih razredov $[f]$, za katere definiramo

$$\| [f] \|_p = \| f \|_p$$

rečemo L^p prostor.

Ali so ti prostori polni? So.

<u>Izrek 1.11</u>: Naj bo f_n zaporedje v L^p, za katerega je $\| f_m - f_n \|_p \to 0$, ko $m, n \to \infty$. Potem obstaja $f \in L^p$, z $\| f_n - f \|_p \to 0$, ko $n \to \infty$.

Dokaz: Ideja je, da dokažemo, da obstaja podzaporedje f_{n_k}, ki konvergira skoraj povsod. Limita je potem iskani f.

Ocenimo za $y > 0$

$$\mu(\{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geq y\})$$

$$= \int_S 1(|f_m(x) - f_n(x)| \geq y)\, \mu(dx)$$

$$\leq \int_S \frac{|f_m(x) - f_n(x)|^p}{y^p}\, \mu(dx)$$

$$\leq \frac{\| f_m - f_n \|_p^p}{y^p}$$

Iz tega sledi, da obstaja podzaporedje $n_1, n_2, \ldots$ z

$$\mu(\{x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \tfrac{1}{2^k}\}) \leq \frac{1}{4^k}$$

Označimo

$$E_k = \{ x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{2^k} \}.$$

Množica

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

je množica vseh x, ki so vsebovani v neskončno E_k.

Vendar je

$$\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \to 0,$$

ko $n \to \infty$. To pomeni, da so vazen na E zaporedja

$f_{n_k}(x)$ Cauchyjeva v smislu Analize 1. Definirajmo

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) & \text{za } x \in E^c. \\ 0 & \text{za } x \in E. \end{cases}$$

Pokazati moramo, da je $f \in L^p$ in je limita v smislu norme.

Iz definicije norme sledi $\|f_{n_k}\|_p \leq C < \infty$ za vse k. Po Fatouju sledi

$$\int_S |f(x)|^p \mu(dx)$$

$$= \int_S \liminf_{n \to \infty} |f_{n_k}(x)|^p \mu(dx)$$

$$\leq \liminf_{n \to \infty} \int_S |f_{n_k}(x)|^p \mu(dx)$$

$$\leq C < \infty.$$

Za fiksen k je

$$\int_S |f(x) - f_{n_k}(x)|^p \mu(dx)$$

$$= \int_S \liminf_{m \to \infty} |f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)|^p \mu(dx)$$

$$\leq \liminf_{m \to \infty} \int_S |f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)|^p \mu(dx)$$

Za dovolj velike m, k so integrali na desni poljubno majhni. Ostanek so rutinske ocene.

<u>Oznake</u>: Pisali bomo

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^p} f.$$

Če so merljive funkcije slučajne spremenljivke, pišemo $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^p} X$.

<u>Opomba</u>: Poseben primer Hölderjeve neenačbe je

$$E(|XY|)^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2),$$

torej Cauchyjeva neenačba ali Cauchy-Schwarzova neenačba.