4. Konvergenca slučajnih spremenljivk

4.1. Tipi konvergence

Privzeli bomo, da imajo slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ vrednosti v metričnem prostoru (M, d) z Borelovo σ-algebro.

Definicije:

(i) Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ konvergirajo skoraj gotovo proti slučajni spremenljivki X, če je

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega), \text{ ko } n \to \infty\}) = 1.$$

(ii) Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ konvergirajo v verjetnosti proti slučajni spremenljivki X, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja

$$P(d(X_n, X) > \varepsilon) \to 0, \text{ ko } n \to \infty.$$

(iii) Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ konvergirajo v porazdelitvi proti slučajni spremenljivki X, če za vsako zvezno omejeno funkcijo $f : M \to \mathbb{R}$ velja

$$E[f(X_n)] \to E[f(X)],$$

ko $n \to \infty$.

<u>Oznake</u>: (i) $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{s.g} X$

(ii) $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} X$

(iii) $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} X$

<u>Opomba</u>: Pri (iii) gre v resnici za konvergenco pripadajočih porazdelitev μ_{X_n} proti μ, ne za konvergenco X_n samih kot funkcij.

Med konvergencami obstaja nekaj hierarhije.

<u>Lema 4.1</u>:

(i) če $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g} X$, potem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ in $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

(ii) če $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, potem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

(iii) če $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ in je družina $\{X_n; X\}$ enakomerno integrabilna, potem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X$.

<u>Dokaz</u>: Seminarska naloga.

V nadaljevanju nas bo najbolj zanimala konvergenca v porazdelitvi. Vseeno navedimo še eno lemo o konvergenci s.g in P.

Lema 4.2: Velja $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, če in samo če ima vsako podzaporedje $\{X_n\}$ nadaljnje podzaporedje, ki konvergira s.g.

Dokaz: Seminarska naloga.

Označimo družino verjetnostnih mer na (M, d) s $Pr(M)$. Če želimo govoriti o konvergenci v $Pr(M)$, moramo definirati neko topologijo. Označimo s $C_b(M)$ množico omejenih zveznih funkcij na M. Topologijo definiramo z okolicami: Če je $\mu \in Pr(M)$ definiramo bazo okolic μ kot množico

$$\{\nu \in Pr(M) : \left| \int f_i(x)\,d\nu(x) - \int f_i(x)\,d\mu(x) \right| < \varepsilon_i \text{ za vsak nabor } f_1, f_2, \dots, f_n \in C_b(M) \text{ in } 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n\}.$$

S tem $Pr(M)$ postane Hausdorffov (zakaj?) prostor.

<u>Definicija</u>: Metrični prostor (M, d) je poljski, če je poln in separabilen.

<u>Izrek 4.3</u>: Či je (M, d) poljski prostor, je topologija na $Pr(M)$ metrizabilna.

<u>Dokaz</u>: Seminarska naloga.

<u>Izrek 4.4</u>: Naslednje izjave so ekvivalentne:

(i) $X_n \xrightarrow{d} X$, ko $n \to \infty$

(ii) $\limsup_{n \to \infty} P(X_n \in F) \leq P(X \in F)$ za vse zaprte F.

(iii) $\liminf_{n \to \infty} P(X_n \in G) \geq P(X \in G)$ za odprte G.

Dokaz: (ii) in (iii) sta očitno ekvivalentni izjavi.

Naj velja (i). Naj bo F zaprta množica. Funkcije

$$f_n(x) = \max(0, 1 - n\, d(x, F))$$

konvergirajo po točkah k χ_F in velja $\chi_F \le f_m$ za vse $m \ge 1$.

Velja

$$P(X_n \in F) = \int_M \chi_F(x)\, \mu_{X_n}(dx)$$

$$\le \int_M f_m(x)\, \mu_{X_n}(dx)$$

Po predpostavki za fiksen m desna stran konvergira proti

$\int_M f_m(x)\, \mu(dx)$. Torej je

$$\limsup_{n \to \infty} P(X_n \in F) \le \int_M f_m(x)\, \mu(dx).$$

ker po predpostavki desna stran konvergira proti $\int_M f_m(x)\,\mu(dx)$.

Ampak ocena velja za vsak $m \geq 1$, torej tudi limito, ki je po izreku o dominirani konvergenci enaka $\mu(F) = \int_M \chi_F(x)\,d\mu(x)$ $= P(X \in F)$.

Za dokaz obratne trditve lahko privzamemo $0 < f < 1$, definiramo $F_i = \{x \in M : f(x) \geq \frac{i}{k}\}$ in aproksimiramo f z vsoto

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(i-1)}{k} \chi_{F_{i-1} \setminus F_i}.$$

Funkcija f in vsota se razlikujeta največ za $1/k$. Bolj natančno

$$\hat{f} \leq f \leq 1/k + \hat{f}.$$

Z nekaj premetavanja in upoštevanjem $F_k = \emptyset$ dobimo, da je

$$\int_M \hat{f}(x)\, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu(F_i)$$

Sledi

$$\int_M f(x)\, d\mu(x)$$

$$\geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu(F_i)$$

$$\geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \limsup_{n\to\infty} \mu_n(F_i)$$

$$\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu_n(F_i)$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \int_M \hat{f}(x)\, d\mu_n(x)$$

$$\geq \limsup_{n\to\infty} \left(\int_M f(x)\, d\mu_n(x) - \frac{1}{k} \right)$$

Ker ocena velja za vsak $k \geq 1$, je

$$\int_M f(x)\, d\mu(x) \geq \limsup_{n\to\infty} \int_M f(x)\, d\mu_n(x).$$

Neenačba velja za poljubno zvezno omejeno f, zato tudi za $-f$. Trditev sledi.

<u>Izrek 4.5</u>: Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ realne slučajne spremenljivke. Naslednji izjavi sta ekvivalentni:

(i) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

(ii) $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ za vse točke $x \in \mathbb{R}$, v katerih je F_X zvezna.

Dokaz: (seminarska naloga)

Izrek 4.5a: Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ slučajne spremenljivke z vrednostmi v (M, d). Naslednji izjavi sta ekvivalentni:

(i) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

(ii) $P(X_n \in A) \to P(X \in A)$ za vsako množico A, za katero je $P(X \in \partial A) = 0$.

Dokaz: Teorija mere nam da, da obstajata odprta množica G in zaprta množica F, da bo $F \subseteq A \subseteq G$ in $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$ za dan $\varepsilon > 0$. Dokaz potem sledi iz izreka 4.4.

Lema 4.6: Naj $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ in $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ za realne X_n, X, Y_n, Y. Potem $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

Dokaz: Iz izreka 4.4. lahko preberemo, da v definiciji šibke konvergence lahko izberemo enakomerno porazdeljene f.

Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\delta > 0$ tak, da iz $|x-y| < \delta$ sledi $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ocenimo $\left(c = \sup_x |f(x)| \right)$

$$
\begin{aligned}
&\left| E[f(X_n+Y_n)] - E[f(X)] \right| \\
&\leq \left| E[f(X_n+Y_n)] - E[f(X_n)] \right| \\
&\quad + \underbrace{\left| E[f(X_n)] - E[f(X)] \right|}_{\to 0 \text{, ko } n\to\infty}
\end{aligned}
$$

Prvi člen ocenimo z

$$\left| E[f(X_n+Y_n)] - E[f(X_n)] \right|$$

$$\leq \underbrace{2C\,P(|Y_n| \geq \delta)}_{\to 0, \text{ ko } n \to \infty.} + \varepsilon$$

Trditev sledi.

<u>Primer</u>: V škatlicah kosmičev je n različnih kuponov. Vsakič, ko kupimo škatlo, je v njej kupon tipa k z verjetnostjo $\frac{1}{n}$, neodvisno od prejšnjih škatel. Naj bo T_n število škatel, ki jih moramo kupiti, da zberemo vse kupone. Dodiplomska verjetnost nam pove, da je

$$T_n \stackrel{d}{=} 1 + G_2 + \cdots + G_n,$$

kjer so G_i neodvisne in

$$G_i \sim \text{Geom}\left(\frac{n-i+1}{n}\right), \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Velja

$$E(T_n) = \sum_{i=2}^{n} \frac{n}{n-i+1} + 1$$

$$\sim n \cdot \log n$$

$$\text{var}(T_n) = \sum_{i=2}^{n} \frac{\frac{(i-1)}{n}}{\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^2}$$

$$= n \cdot \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{(n-i+1)^2} \sim n^2.$$

Pričakovali bi, da

$$\frac{T_n - n\log n}{n} \xrightarrow{d} X.$$

Kaj bi utegnila biti porazdelitev X?

4. 2. Karakteristične funkcije

Karakteristične funkcije so za namene verjetnosti prirejene Fourierove transformacije.

Definicija:

(i) Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Karakteristična funkcija φ_X je dana z

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}], \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Naj bo $\underline{X}$ slučajni vektor v $\mathbb{R}^n$. Karakteristična funkcija je dana z

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = E[e^{i\underline{t}^T \cdot \underline{X}}], \quad \underline{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Opomba: Karakteristična funkcija obstaja zaradi omejenosti za vsak $t \in \mathbb{R}$ ali $\underline{t} \in \mathbb{R}^n$.

Transformacije so navadno koristne, če so injektivne. Tukaj slikamo mere v $Pr(\mathbb{R})$ v funkcije iz $\mathbb{R}$ v $[0,1]$. Velja je

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)|$$

$$= |E[e^{itX}(e^{ihX} - 1)]|$$

$$\leq E[|(e^{ihX} - 1)|] \to 0,$$ ko

$h \to 0$ po izreku o dominirani konvergenci. Karakteristične funkcije so zvezne. Za dokaz enoličnosti si sposodimo dejstvo iz analize. Če je f dvakrat zvezno odvedljiva s kompaktnim nosilcem, potem obstaja funkcija $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, da velja

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \hat{f}(t)\, dt.$$

Računamo

$$E[f(X)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \hat{f}(t)\,dt\right]$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} E(e^{itX}) \hat{f}(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t) \hat{f}(t)\,dt.$$

To pomeni, da $\varphi_X(t)$ enolično določa $E[f(X)]$. Dvakrat zvezno odvedljive funkcije s kompaktnim nosilcem so dovolj, da enolično določijo porazdelitev X.

Alternativno lahko dokažemo inverzno formulo.

<u>Izrek 4.7</u>: Naj bo φ_X karakteristična funkcija slučajne spremenljivke X. Velja za $a < b$

$$\frac{1}{2}\mu_X(\{a\}) + \mu_X((a,b)) + \frac{1}{2}\mu_X(\{b\})$$

$$= \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\,\varphi_X(t)\,dt.$$

Dokaz: P. Billingsley, Probability and Measure, Wiley, 1979, str. 298.

Primeri:

(i) Naj bo $Z \sim N(0,1)$. Funkcija

$$z \longmapsto E[e^{z\cdot Z}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\cdot e^{-x^2/2}\,dx$$

je zaradi enakomerne konvergence na kompaktnih množicah holomorfna na $\mathbb{C}$. Za realen z lahko računamo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} \cdot e^{-x^2/2} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{2}} \cdot e^{z^2/2} \, dx$$

$$= e^{z^2/2}$$

Zaradi holomorfnosti rezultat velja tudi za kompleksne z.

Če vstavimo $z = i \cdot t$ dobimo

$$\varphi_Z(t) = e^{-t^2/2}$$

Za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ velja, da je $X \sim \sigma Z + \mu$, torej

$$E(e^{itX}) = E(e^{it(\sigma Z + \mu)})$$

$$= e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2} \cdot t}$$

(ii) Recimo, da je $X \sim \Gamma(a, \lambda)$.

Računamo

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{itx} x^{a-1} e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{-(\lambda - it)x} \, dx$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a)}{(\lambda - it)^a}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a$$

(iii) Naj bo $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$.

Vemo, da obstaja matrika $\underline{A}$ z $\underline{A}\,\underline{A}^T = \underline{\Sigma}$ in je

$$\underline{X} \overset{d}{=} \underline{A} \cdot \underline{Z} + \underline{\mu}, \quad \underline{Z} \sim N(\underline{0}, \underline{I})$$

Sledi

$$E[e^{i\underline{t}^T\cdot\underline{X}}]$$

$$= E[e^{i\underline{t}^T(\underline{A}\underline{Z}+\underline{\mu})}]$$

$$= e^{i\underline{t}^T\cdot\underline{\mu}} E[e^{i\underline{t}^T\underline{A}\cdot\underline{Z}}]$$

$$= e^{it\mu} E[e^{i\underline{s}^T\cdot\underline{Z}}]$$

Tukaj nam zmanjka košček.

<u>Izrek 4.8</u>: Če sta X in Y neodvisni, je $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$.

<u>Dokaz</u>:

$$E[e^{it(X+Y)}]$$

$$= E[e^{itX}\cdot e^{itY}]$$

$$= E[e^{itX}]\cdot E[e^{itY}]$$

$$= \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

Trditev očitno velja tudi za več slučajnih spremenljivk

(iii) (nadaljevanje)

$$E\left[e^{i\underline{t}^T\cdot\underline{x}}\right]$$

$$= e^{i\underline{t}\underline{\mu}}\cdot\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{s_k^2}{2}}$$

$$= e^{i\underline{t}\underline{\mu}}\; e^{-\frac{1}{2}\underline{s}^T\underline{s}}$$

$$= e^{i\underline{t}\underline{\mu}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\underline{t}^T\cdot\underline{A}\cdot\underline{A}^T\cdot t}$$

$$= e^{i\underline{t}\underline{\mu} - \frac{1}{2}\underline{t}^T\underline{\Sigma}\,\underline{t}}$$

<u>Opomba</u>: Izrek o enoličnosti velja tudi za karakteristične funkcije vektorjev. Zgornje pomeni, da $\underline{\mu}$ in $\underline{\Sigma}$ enolično določata porazdelitev $\underline{x}$.

(iv) Če sta X, Y neodvisni in

je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ in $Y \sim N(\nu, \tau^2)$

je

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

$$= e^{it\mu - \frac{\sigma^2}{2}t} \cdot e^{it\nu - \frac{\tau^2}{2}t}$$

$$= e^{it(\mu+\nu) - \frac{1}{2}(\sigma^2+\tau^2)t} .$$

Sledi $X + Y \sim N(\mu+\nu, \sigma^2+\tau^2)$.

(v) Naj ima X Laplaceovo

gostoto $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

Vemo, da je $X \stackrel{d}{=} U - V$, kjer

sta U, V neodvisni in $\exp(1)$

porazdeljeni. Sledi

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

$$= E\left(e^{it(U-V)}\right)$$

$$= E(e^{itu}) \cdot E(e^{-itv})$$

$$= \frac{1}{1-it} \cdot \frac{1}{1+it}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}$$

(vi) Naj bo X slučajna spremenljivka s $F_X(x) = e^{-e^{-x}}$, torej gostoto

$$f_X(x) = e^{-e^{-x}} \cdot e^{-x}.$$

Velja

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot e^{-e^{-x}} \cdot e^{-x}\, dx$$

(Nova spremenljivka:

$$e^{-x} = u$$

$$-e^{-x} \cdot dx = du$$

$$= \int_0^\infty u^{-it} \cdot e^{-u} \cdot du$$

$$= \int_0^\infty u^{(1-it)-1} \cdot e^{-u} du$$

$$= \Gamma(1-it)$$

Karakteristične funkcije dobro funkcionirajo s šibko konvergenco.

Če $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, potem po definiciji $E(e^{itX_n}) \to E(e^{itX})$ za vsak $t \in \mathbb{R}$, ko $n \to \infty$. Nekoliko težje je utemeljiti obrat. Ni dovolj zahtevati samo, da $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ po točkah, da bi veljalo $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

Izrek 4.9: Naj bo X_n zaporedje slučajnih spremenljivk in naj velja $\varphi_{X_n}(t) \to g(t)$ za $t \in \mathbb{R}$. Če je g zvezna v $t=0$, je karakteristična funkcija porazdelitve μ_X in velja $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

Dokaz (odložimo)

Ideja dokaza je, da najdemo podzaporedje X_{n_k}, tako da $X_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ in potem utemeljimo, da je X tudi limita za celo zaporedje. Analogija iz Analize 1 je, da ima zaporedje član v kompaktni množici stekališče. Če je to stekališče edino stekališče, mora biti tudi limita.

Za izpeljavo analogije potrebujemo koncept (relativne) kompaktnosti v $Pr(M)$.

<u>Definicija</u>: Družina $\{\mu_i \in Pr(M), i \in I\}$ je utesnjena, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja kompaktna množica $K_\varepsilon \subseteq M$, taka da je $\mu_i(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ za vse μ_i.

<u>Izrek 4.10</u>: Naj bo $\{\mu_n\}$ utesnjena družina mer na $\mathbb{R}$. Obstaja podzaporedje μ_{n_k} z $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$, ko $k \to \infty$.

<u>Dokaz</u>: Za vsak $q \in \mathbb{Q}$, je zaporedje $\mu_n((-\infty, q])$ omejeno, zato obstaja podzaporedje, ki konvergira.

Naj bodo $q_1, q_2, \ldots$ racionalna števila. Obstaja podzaporedje $\mu_{n_{1,k}}$, da $\mu_{n_{1,k}}((-\infty, q_1])$ konvergira. To podzaporedje ima podzaporedje $\mu_{n_{2,k}}$, za katerega $\mu_{n_{2,k}}((-\infty, q_2])$ konvergira, ...

Diagonalno zaporedje $\mu_{n_{k,k}}$ je tako, da $\mu_{n_{k,k}}((-\infty, q])$ konvergira za vsako racionalno število. Definiramo

$$F(q) = \lim_{k \to \infty} \mu_{n_{k,k}}((-\infty, q]).$$

Funkcija F je naraščajoča in zaradi utesnjenosti je

$$F(q) \to 1, \text{ ko } q \to \infty$$

$$F(q) \to 0, \text{ ko } q \to -\infty$$

Definirajmo

$$G(x) = \inf \{ F(q) : x < q \}.$$

Funkcija G je nepadajoča in ima za $x \to \mp\infty$ enaki limiti kot F.

Za $\varepsilon > 0$ in dan x obstaja q, za katerega je $F(q) < G(x) + \varepsilon$.

Če je $x \leq y < q$, je

$$G(y) \leq F(q) < G(x) + \varepsilon.$$

Funkcija G je desno zvezna.

Sledi, da je G porazdelitvena funkcija neke mere μ. Ostane še dokazat, da $\mu_{n_{k,k}} \Rightarrow \mu$.

Naj bo x točka zveznosti G.

Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\delta > 0$ tak, da iz $|x-y| < \delta$ sledi $|G(x) - G(y)| < \varepsilon$. Naj bosta $p, q \in \mathbb{Q}$ z $x - \delta < p < x < q < x + \delta$.

Velja

$$
\begin{aligned}
G(x-\delta) &\leq F(p) \\
&\leq \liminf_{k \to \infty} \mu_{n_{k,k}}((-\infty, x]) \\
&\leq \limsup_{k \to \infty} \mu_{n_{kk}}((-\infty, x]) \\
&\leq F(q) \\
&\leq G(x+\delta)
\end{aligned}
$$

Sledi, da limita $\mu_{n_{kk}}((-\infty, x])$ obstaja in je enaka $G(x)$.

Opombe:

(i) Utesnjenost smo rabili samo za to, da je $G(x) \to 1$, ko $x \to \infty$ in $G(x) \to 0$, ko $x \to -\infty$.

(ii) Za bolj splošne dokaze moramo poseči po funkcionalni analizi, bolj natančno po Banach-Alaoglujevem izreku.

Izrek, da obstaja podzaporedje $\mu_{n_{k,k}} \Rightarrow \mu$ velja za vse poljske prostore.

(iii) Kot vemo, je utesnjenost analogija relativne kompaktnosti.

Dokaz izreka 4.9: Kot prvo bomo dokazali, da iz zveznosti g v točki $t=0$ sledi, da je družina $\{\mu_{X_n}\}$ utesnjena. Potem obstaja podzaporedje $\mu_{X_{n_k}} \Rightarrow \mu_X$. Po definiciji je potem g karakteristična funkcija μ_X. Ampak vsako stekališče ima g za karakteristično funkcijo, zato ima $\{\mu_n\}$ natanko eno stekališče. Sledi $\mu_{X_n} \Rightarrow \mu_X$.

Dokazati moramo še utesnjenost.

Ocenimo

$$\frac{1}{u} \int_{-u}^{u} \left(1 - \varphi_{X_n}(t)\right) dt$$

$$=$$

(Fubini)
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{u} \int_{-u}^{u} (1 - e^{itx})\, dt \right] \mu_{X_n}(dx)$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin ux}{u \cdot x}\right) \mu_{X_n}(dx)$$

$$\geq 2 \int_{|x| \geq \frac{2}{u}} \left(1 - \frac{1}{|ux|}\right) \mu_{X_n}(dx)$$

$$\geq \mu_{X_n}\left(\{x : |x| \geq \tfrac{2}{u}\}\right)$$

Ker je g zvezna v $t = 0$, je za dan $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{u} \int_{-u}^{u} (1 - g(u))\, du < \varepsilon$$

za $u < \delta$. Za fiksen u po izreku o dominirani konvergenci velja

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_{X_n}(t))\,dt \to \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-g(t))\,dt,$$

zato je za $n \geq n_0$

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_{X_n}(t))\,dt < 2\varepsilon.$$

Torej je $\mu_{X_n}(\{x : |x| \geq \frac{2}{u}\}) < 2\varepsilon$ za $n \geq n_0$. Če $\frac{2}{u}$ povečamo, bo neenačba veljala tudi za vse n do n_0. Izrek je s tem dokazan.

Izrek 4.10: Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne in enako porazdeljene z $E(X_1) = \mu$ in $var(X_1) = \sigma^2 < \infty$.

Naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Velja

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Dokaz: Brez škode za splošnost lahko privzamemo $\mu = 0$ in $\sigma = 1$.

Velja

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Euler pravi: za $z_n \to z$

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \to e^z, \text{ ko } n \to \infty$$

Dokazati moramo, da

$$n\left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-1\right)$$

konvergira, ko $n \to \infty$. Integracija per partes da

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{i}{2!}\int_0^x (x-s)^2 e^{is}\,ds$$

in

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \int_0^x (x-s)(e^{is}-1)\,ds$$

Ocenimo

$$\left| e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2} \right|$$

$$\leq \min\left(\frac{|x|^3}{3!}, |x|^2\right)$$

Sledi

$$\left| \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 + \frac{t^2}{2n}\right) \right|$$

$$\leq E\left[\min\left\{\frac{|X|^3}{3!\, n^{3/2}}, \frac{|X|^2}{n}\right\}\right]$$

Pomnožimo obe strani z n.

Minimum na desni je dominiran z $|X|^2$ in $\to 0$, ko $n \to \infty$.

Sledi, da

$$n\left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) \to -t^2/2,$$

ko $n \to \infty$. Po Eulerju potem

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}},$$

kar je karakteristična funkcija $N(0,1)$ porazdelitve.

kaj pa, če $X_1, X_2, \ldots$ niso

enako porazdeljene, vendar še

vedno neodvisne. Recimo, da

imamo za vsak $n \geq 1$ zaporedje

neodvisnih slučajnih spremenljivk

$$X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,r_n}.$$

Takemu nakovu večemo trikotna

shema. Definiramo

$$S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,r_n}.$$

Predpostavimo, da je $E(X_{n,k}) = 0$

in označimo $\sigma_{n,k}^2 = \mathrm{var}(X_{n,k})$,

ter $s_n^2 = \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{n,k}^2$.

<u>Izrek 4.11</u> (Lindeberg)

Naj bo $\{X_{n,k} : n \geq 1, 1 \leq k \leq r_n\}$

trikotna shema.

Za fiksen $n \geq 1$ naj bodo

$X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,r_n}$ neodvisne.

Naj bo $S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n r_n}$

Če velja

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{r_n} E\left[|X_{nk}|^2 \cdot 1(|X_{nk}| \geq \varepsilon \cdot s_n)\right] = 0 \quad \text{za vsak } \varepsilon > 0,$$

potem $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$.

Opomba: Ideja tega Lindebergovega pogoja je, da so sumandi „majhni".

Dokaz: Dokaz bo z karakterističnimi funkcijami. Vemo oceno

$$\left| \varphi_{X_{n,k}}(t) - \left(1 - \frac{1}{2} t^2 \sigma_{n,k}^2\right) \right|$$

$$\leq E\left[\min\{ |t|^2 |X_{n,k}|^2, |t|^3 |X_{n,k}|^3 \} \right]$$

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $s_n = 1$.

Ocenimo

$$E\left[|X_{n,k}|^3 \cdot |t|^3 \mathbb{1}(|X_{n,k}| < \varepsilon) \right]$$

$$+ \quad E\left[|X_{n,k}|^2 \cdot |t|^2 \mathbb{1}(|X_{n,k}| \geq \varepsilon) \right]$$

$$\leq \varepsilon \cdot |t|^3 \cdot \sigma_{n,k}^2$$

$$+ \; t^2 \, E\left[|X_{n,k}|^2 \mathbb{1}(|X_{n,k}| \geq \varepsilon) \right]$$

Če neenačbe seštejemo, sledi

$$\sum_{k=1}^{r_n} \left| \varphi_{X_{n,k}}(t) - \left(1 - \frac{1}{2} t^2 \sigma_{n,k}^2\right) \right|$$

$$\to 0, \text{ ko } n \to \infty.$$

Za nadaljevanje potrebujemo elementarno neenačbo. Naj bodo $z_1, \ldots, z_n$ in $w_1, \ldots, w_n$ kompleksna števila, ki po absolutni vrednosti ne presegajo 1. Potem velja

$$\left| \prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} w_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|$$

Iz elementarne ocene

$$\sigma_{n,k}^2 \leq \varepsilon^2 + E\left[|X_{n,k}|^2 \cdot \mathbb{1}(|X_{n,k}| \geq \varepsilon)\right]$$

sledi, da

$$\max_{1 \leq k \leq r_n} \sigma_{n,k}^2 \to 0.$$

To pomeni, da so faktorji

$(1 - \frac{1}{2} t^2 \sigma_{n,k}^2)$ po absolutni

vrednosti manjši od 1.

Neenačba za kompleksna

števila nam da

$$\left| \prod_{k=1}^{r_n} \varphi_{X_{n,k}}(t) - \prod_{k=1}^{r_n} \left(1 - \frac{1}{2} t^2 \sigma_{n,k}^2\right) \right|$$

$$\to 0, \text{ ko } n \to \infty.$$

Manjka samo to, da

$$\prod_{k=1}^{r_n} \left(1 - \frac{1}{2} t^2 \sigma_{n,k}^2\right)$$

$$\to e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Ampak to je Analiza 1. Za $|x| \le 1/2$ velja

$$|e^x - 1 - x| \le x^2$$

To pomeni, da je za dovolj velike n

$$\left| \prod_{k=1}^{r_n} \left(1 - \frac{1}{2} t^2 \sigma_{n,k}^2\right) - e^{-t^2/2} \right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{r_n} \left| \left(1 - \frac{1}{2} t^2 \cdot \sigma_{n,k}^2\right) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{n,k}^2}{2}} \right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{r_n} \frac{t^4 \cdot \sigma_{n,k}^4}{4}$$

$$\le \frac{t^4}{4} \cdot \max_{1 \le k \le r_n} \sigma_{n,k}^2 \to 0,$$

ko $n \to \infty$.

Primer: V problemu rojstnih dni naletimo na vsoto $1 + X_2 + \cdots + X_n$, kjer so $X_2, X_3, \ldots, X_n$ neodvisne in $X_k \sim \text{Geom}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$. Označimo $S_n = 1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$. Velja

$$E(S_n) = 1 + \frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{1}$$

$$= n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim n \cdot \log n$$

$$\text{var}(S_n) = n \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{(n-k+1)^2}$$

$$= n \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{n}{\ell^2} - \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{n}{\ell} \right)$$

$$\sim n^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} - n \log n$$

$$\sim n^2 \cdot \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{ko } n \to \infty.$$

Tipično dobimo konvergenco

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\text{var}(S_n)}} \ldots$$ ker imamo

$E(S_n)$ in $\operatorname{var}(S_n)$ samo aproksimativno, upoštevamo aproksimaciji in se vprašamo, kam v porazdelitvi konvergira

$$T_n = \frac{1 + X_2 + \cdots + X_n - n \log n}{n}$$

Opomba: iz definicije karakterističnih funkcij sledi $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$.

Elementaren račun pokaže, da je za $X \sim \text{Geom}(p)$

$$\varphi_X(t) = G_X(e^{it}) = \frac{p \cdot e^{it}}{1 - q e^{it}}.$$

Sledi

$$\varphi_{T_n}(t) = n^{-it} \prod_{k=1}^{n} \frac{\frac{n-k+1}{n} e^{it/n}}{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right) e^{it/n}}$$

Števec in imenovalec delimo z e^{it} in preoblikujemo v

$$\varphi_{T_n}(t) = n^{-it} \cdot n!$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{n \cdot e^{-it/n} - (k-1)}$$

$$= \frac{n^{-it} \cdot n!}{\prod_{k=1}^{n} \left[\left(n \left(e^{-it/n} - 1 \right) + n - (k-1) \right) \right]}$$

Gauss pravi: za $z \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^z \cdot n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

$$= \Gamma(z).$$

Konvergenca je enakomerna na kompaktih, ki ne vsebujejo negativnih celih števil.

To med drugim pomeni, da za $z_n \to z \notin \{0, -1, \dots\}$ velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{z_n} \cdot n!}{z_n(z_n+1)\cdots(z_n+n)} = \Gamma(z).$$

V našem primeru je

$$z_n = n\left(e^{-it/n} - 1\right) \to -it.$$

Za $t \neq 0$ torej sledi

$$\varphi_{T_n}(t) \to (-it)\,\Gamma(-it)$$

$$= \Gamma(1-it),$$

ko $n \to \infty$.

<u>Opomba</u>: V našem produktu manjka člen z v imenovalcu.

Limita je znana in očitno velja za $t=0$. S tem vemo limitno porazdelitev T_n.

Poissonova aproksimacija

Poissonovo aproksimacijo smo že uporabili, ko smo motivirali Poissonovo porazdelitev. Za „majhne" p je $\mathrm{Bin}(n,p)$ porazdelitev „podobna" Poissonovi. Bolj splošno želimo oceniti

$$P(X_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!},$$

kjer je $X_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, I_k neodvisni in $I_k \sim \mathrm{Bernoulli}(p_k)$ za $k = 1, 2, \dots, n$ ter $\lambda = p_1 + \dots + p_n$.

Idejo, ki jo uporabimo, je imel Charles Stein.

Naj bo χ_A indikator množice A in privzemimo, da za funkcijo $g : \{0,1,\dots\} \to \mathbb{R}$ velja

$$\lambda g(k+1) - k g(k)$$

$$= \chi_A(k) - \sum_{\ell \in A} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\ell}}{\ell!} .$$

Če na obeh stranek za k vstavimo X_n in izračunamo pričakovano vrednost, dobimo

$$E[\lambda g(X_n+1) - X_n g(X_n)]$$

$$= P(X_n \in A) - \sum_{\ell \in A} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{\ell}}{\ell!} .$$

Morda je levo stran laže oceniti kot desno

Lema 4.12: Obstaja rešitev enačbe

$$\lambda y(k+1) - k y(k)$$
$$= \chi_A(k) - \sum_{\ell \in A} \frac{e^{-\lambda} \lambda^\ell}{\ell!},$$

za katero je

(i) $$|y(k)| \leq \min\left(1, \frac{4}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

(ii) $$\sup_{k \geq 0} |y(k+1) - y(k)|$$
$$\leq \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$$

Dokaz: Analiza 1, odložimo.

Izrek 4.13: Naj bo $X_n = I_1 + \dots + I_n$ za neodvisne $I_k \sim \text{Bernoulli}(p_k)$ in $\lambda = p_1 + \dots + p_n$. Velja

$$\left| P(X_n \in A) - \sum_{\ell \in A} \frac{e^{-\lambda} \lambda^\ell}{\ell!} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} p_k^2$$

<u>Dokaz</u>: Uvedimo oznake

$X_n = W$ in $W_j = W - I_j$,

$j = 1, 2, \ldots, n$. Računamo

$$E\left[\lambda\, g(W+1) - W\, g(W)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E\left[p_j\, g(W+1) - I_j\, g(W)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E\left[p_j\, g(W+1) - I_j\, g(W_j+1)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j\, E\left[g(W+1) - g(W_j+1)\right]$$

(neodvisnost)

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j\, E\Big[p_j\, g(W_j+2)$$

$$+ q_j\, g(W_j+1)$$

$$- g(W_j+1)\Big]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j^2 \, E\left[g(W_j + 2) - g(W_j + 1) \right]$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} p_k^2$$

<u>Primer</u>: Če je $X_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$, je

$$\left| P(X_n \in A) - \sum_{l \in A} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^l}{l!} \right|$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \cdot \frac{\lambda^2}{n}$$

$$= \lambda\left(1 - e^{-\lambda}\right) \cdot \frac{1}{n} .$$

Ta ocena je mnogo močnejša od $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} Z \sim Po(\lambda)$.

<u>Dokaz leme 4.12</u>: Rekurzivna enačba ima eksplicitno rešitev.

Uporabimo nastavek

$$y(k) = \frac{(k-1)!\, u(k)}{\lambda^k} .$$

Enačba preide v

$$u(k+1) - u(k) = (\chi_A(k) - c)\frac{\lambda^k}{k!}$$

Naj bo $y(0) = y_0$. Sledi

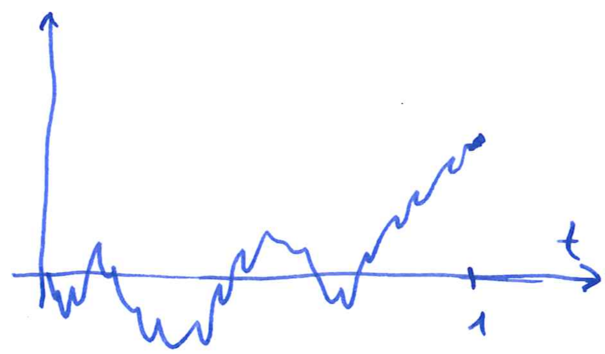
$$u(k) = \sum_{k=0}^{n-1} (\chi_A(k) - c)\frac{\lambda^k}{k!} + u_0$$

Naprej je nekaj ocenjevanja z Analizo 1.

Primer: Konstrukcija Brownovega gibanja.

Načeloma je Brownovo gibanje nabor slučajnih spremenljivk $\{B_t : t \in [0,1]\}$. Iz razlogov simetrije je $E(B_t) = 0$, iz razlogov časovne invariance pa je $var(B_t - B_s) = t - s$ (enote izberemo tako, da je proporcionalnostna konstanta enaka 1. Želimo še, da so funkcije $t \longmapsto B_t(\omega)$ zvezne. s.g.

Slika:



Vprašanje je, ali lahko najdemo verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in nabor slučajnih spremenljivk z zgornjimi lastnostmi.

V diskretnem času bi bila analogija „popolnoma slučajnega gibanja" slučajni sprehod S_n, kjer je $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $S_0 = 0$, X_k pa neodvisne z $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = 1/2$. Če si izberemo trenutke $t_k = \frac{k}{n}$, $0 \le k \le n$ in postavimo $B_{t_k} = \frac{S_k}{\sqrt{n}}$, vmes pa linearno interpoliramo, morda tako definirane slučajne spremenljivke v $C[0,1]$ šibko konvergirajo. To je res, vendar so dokazi dolgovezni.

Izbrali bomo alternativno konstrukcijo. Funkcijo $t \mapsto B_t(\omega)$ bomo definirali kot funkcijsko vrsto, ki bo enakomerno konvergirala s.g. Potrebovali bomo dva gradnika:

(i) privzeli bomo, da obstaja števna družina neodvisnih normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk Z_i na nekem

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Obstoj nam zagotavlja

teorija mere.

(ii) Naj bo $Z \sim N(0,1)$. Ocenimo

lahko za $z > 0$

$$P(Z \geq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-x^2/2} \, dx$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_z^\infty \frac{x}{z} \cdot e^{-x^2/2} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot z} \cdot e^{-z^2/2}$$

Lotimo se konstrukcije: označimo

$D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^n \right\}$ in z

$D = \bigcup_{n=0}^\infty D_n$ množico vseh diadičnih

ulomkov. Števno družino neodvisnih

standardno normalnih slučajnih

spremenljivk indeksiramo z

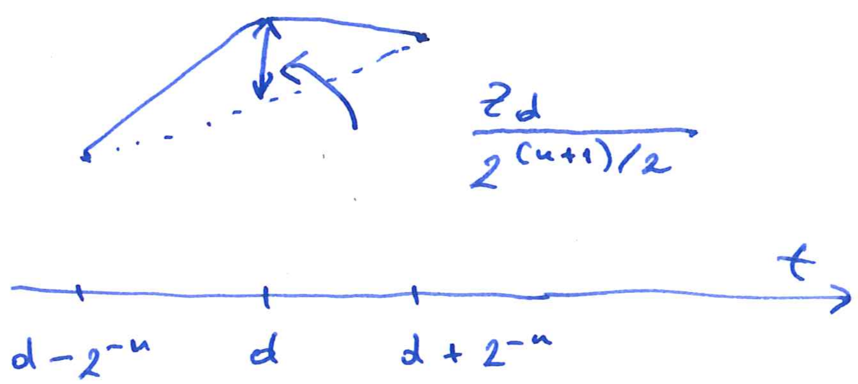
elementi $d \in D$. Definiramo

$$B(0) = 0 \quad \text{in} \quad B(1) = Z_1$$

Nadaljujemo z indukcijo. Naj bo $d \in D_n \setminus D_{n-1}$. Postavimo

$$B(d) = \frac{B(d-2^{-n}) + B(d+2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}$$

Slika:



Opazimo naslednje:

(i) za $d_1 < d_2 < \dots < d_m$, $d_k \in D_n$

so komponente vektorja

$(B(d_1), B(d_2), \dots, B(d_m))$ linearne

kombinacije Z_d, $d \in D_n$, zato je

vektor večrazsežen normalen.

(ii) za $d \in D_n \setminus D_{n-1}$ je povprečje

$$\frac{B(d-2^{-n}) + B(d+2^{-n})}{2}$$

odvisno le od Z_d za $d \in D_{n-1}$, zato je neodvisno od Z_d. Isto velja

za razliko $\dfrac{B(d+2^{-n}) - B(d-2^{-n})}{2}$

Velja

$$B(d+2^{-n}) - B(d)$$

$$= \frac{B(d+2^{-n}) - B(d-2^{-n})}{2}$$

$$- \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}$$

$$B(d) - B(d - 2^{-n})$$

$$= \frac{B(d + 2^{-n}) - B(d - 2^{-n})}{2}$$

$$+ \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}$$

(iii) varianca razlike

$$\frac{B(d + 2^{-n}) - B(d - 2^{-n})}{2}$$

je $\frac{1}{2^{n+1}}$, kar sledi

hitro po indukciji. V točki

(ii) sta zato prirastka

$B(d + 2^{-n}) - B(d)$ in

$B(d) - B(d - 2^{-n})$ neodvisna,

ker sta oblike $X + Y$ in $X - Y$

za neodvisni normalni X, Y

z enakima variancama in je

$\mathrm{cov}(X+Y, X-Y) = 0$.

(iv) V rešitvi so vse razlike

$B(\frac{k}{2^n}) - B(\frac{k-1}{2^n})$, $k = 1, \ldots, 2^n$

med sabo neodvisne. Spet gre dokaz z indukcijo. Za $n = 1$ lahko neodvisnost preverimo.

Za indukcijski korak opazimo, da sta po dva po dva sosednja para prirastkov funkcije razlike $B(d + 2^{-n}) - B(d - 2^{-n})$ in slučajne spremenljivke Z_d, $d \in D_n \setminus D_{n-1}$.

To pomeni, da so ti pari med sabo neodvisni. Ker so po točki (iii) neodvisni tudi med sabo, imamo polno neodvisnost. Iz tega sledi še to, da je za $d_1 < d_2$, $d_1, d_2 \in D_n$ $\operatorname{var}(B(d_2) - B(d_1))$

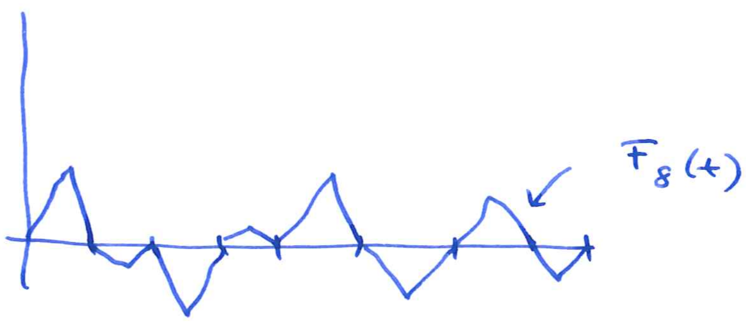
$= d_2 - d_1$

Zdaj je vse pripravljeno. Definirali bomo zaporedje zveznih funkcij, ki so bodo na D ujemale z $B(d)$. Definiramo

$$F_0(t) = t \cdot Z_1$$

$$F_n(t) = \begin{cases} \dfrac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}, & t \in D_n \setminus D_{n-1} \\ 0, & t \in D_{n-1} \\ \text{linearno vmes.} & \end{cases}$$

<u>Slika</u>:



Vsota $\sum_{i=0}^{n} F_i(t)$ je zvezna odsekoma linearna funkcija, ki se na D_n ujema z $B(d)$, kar spet lahko vidimo z indukcijo. Ker so $F_i(d) = 0$ za $i \geq n+1$, je $B(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d)$. Če ta vrsta s.g. enakomerno konvergira na $[0,1]$, bo limita iskani B.

Naj bo $c > 0$ konstanta in ocenimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\text{obstaja } d \in D_n \text{ z } |Z_d| \geq c\sqrt{n}\right)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d \in D_n} P(|Z_d| \geq c\sqrt{n})$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1)\, P(|Z_1| \geq c\sqrt{n})$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1}+1\right) e^{-\frac{c^2 n}{2}}$$

Če je, recimo, $c > \sqrt{2 \log 2}$, potem vrsta konvergira. Prva Borel-Cantellijeva lema pravi, da se bo s.g. „zgodilo" samo končno mnogo dogodkov

$$\left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} |F_n(t)| \geq \frac{c\sqrt{n}}{2^{(n+1)/2}} \right\}.$$

Ampak to pomeni, da s.g. vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ enakomerno konvergira proti limiti $B(t)$, ki je tudi s.g. zvezna.

Preverimo še, da $B(t)$ ima

želene lastnosti. Iz konstrukcije

sledi, da so prirastki

$$B(d_2) - B(d_1), \ldots, B(d_m) - B(d_{m-1})$$

za $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$ neodvisni in

normalno porazdeljeni za

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_m, \quad d_k \in D_n.$$

Če je $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = 1$,

lahko najdemo $t_{k,n} \in D_n$, da to

$t_{k,n} \to t_k$, ko $n \to \infty$. To pomeni,

da bodo $B(t_{k,n}) - B(t_{k-1,n})$

neodvisne in bodo zaradi enakomerne

konvergence konvergirale s.g.

proti $B(t_k) - B(t_{k-1})$

Poleg tega bodo variance konvergirale proti $t_k - t_{k-1}$ za $k = 1, 2, \ldots, m$.

Potrebujemo še naslednjo malenkost: naj bo $X_n \xrightarrow{d} X$ in $X_n \sim N(0, \sigma_n^2)$ in $\sigma_n^2 \to \sigma^2 > 0$. Potem je

$$\varphi_X(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t)$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{t^2 \sigma_n^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}},$$

torej je $X \sim N(0, \sigma^2)$.

Če so komponente $\underline{X}^n = (X_1^n, X_2^n, \ldots X_m^n)$ neodvisne in je $\underline{X}^n \xrightarrow{d} \underline{X}$, so tudi komponente $\underline{X}$ neodvisne.

Končno sledi: nabor slučajnih spremenljivk $\{B(t) : t \in [0,1]\}$ ima naslednje lastnosti:

(i) za $0 \le t_1 < t_2 < \quad < t_m \le 1$ so razlike $B(t_k) - B(t_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots, m$ neodvisne in normalno porazdeljene.

(ii) za $0 \le s < t \le 1$ je $E(B(t)) = 0$

$$\mathrm{var}\,(B(t) - B(s)) = t - s$$

(iii) za s.g. vse ω je funkcija

$$\omega \longmapsto B(t, \omega)$$

zvezna.

<u>Opombe</u>:

(i) Na konstrukcijo B lahko gledamo kot na konstrukcijo slučajne spremenljivke +

vrednostmi v $C[0,1]$ s supremum normo in pripadajočo Borelovo σ-algebro. To pomeni, da je porazdelitev B mera na $C[0,1]$.
Mera ima ime: Wienerjeva mera, ki jo navadno označimo z W.

(ii) To, da je $\omega \mapsto B(t,\omega)$ s.g. zvezna lahko popravimo v zveznost tako da iz Ω „pomečemo" ω, za katere nimamo zveznosti. Ti ω sestavljajo dogodek z mero 0.

(iii) Konstrukcijo lahko vecikliramo in definiramo Brownovo gibanje za $t \geq 0$. Spet lahko gledamo na Brownovo gibanje kot nabor slučajnih spremenljivk $\{B(t) : t \geq 0\}$ ali na slučajno spremenljivko z vrednostmi v $C[0,\infty)$.

(iv) Z malce truda lahko dokažemo, da je preslikava

$$(\omega, t) \longmapsto B(t, \omega)$$ merljiva

glede na σ-algebro $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,\infty))$.

<u>Izrek 4.14</u>: Naj bo $0 \leq a < b < \infty$. Skoraj gotovo funkcija $t \mapsto B(t)$ na $[a,b]$ ni monotona.

<u>Dokaz</u>: Če je funkcija $t \mapsto B(t,\omega)$ na $[a,b]$ monotona, so vsi prirastki $B(t_1) - B(t_0), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ za $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ istega predznaka. Verjetnost za to je $2 \cdot 2^{-n}$, ker so prirastki neodvisni. Ker to velja za vse n, trditev sledi.

Zaključna opomba: konstrukcija Brownovega gibanja ima še močnejšo varianto.

Izrek 4.15: (Donskerjev princip invariance). Naj bodo $X_1, X_2, \dots$ med sabo neodvisne, enako porazdeljene z $EX_1 = 0$ in $\mathrm{var}(X_1) = 1$. Naj bo $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Naj bo

$$B^n(t) = \begin{cases} \frac{S_k}{\sqrt{n}} & \text{za } t = k/n; \\ \text{linearen vmes.} \end{cases}$$

Velja $B^n \xrightarrow{d} B$, kjer je B Brownovo gibanje, $n \to \infty$ in na $C[0,\infty)$ izberemo Borelovo σ-algebro.

Navedimo se dve preprosti lastnosti Brownovega gibanja:

(i) Če je $(B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, je tudi $(\tilde{B}_t : t \geq 0)$ z $\tilde{B}_t = \sqrt{c}\, B_{t/c}$ Brownovo gibanje.

(ii) Če je $(B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, je tudi $(\tilde{B}_t : t \geq 0)$ z $\tilde{B}_t = t \cdot B_{1/t}$ Brownovo gibanje.

Trditi preverimo tako, da za $\tilde{B}$ preverimo lastnosti v definiciji. Nekaj več dela je z drugo trditvijo, ker moramo preveriti tudi zveznost.

<u>Izrek 4.15</u>: Z verjetnostjo 1 poti Brownovega gibanja v nobeni točki $t \in (0,\infty)$ niso Lipschitz zvezne (in tudi ne odvedljive).

Dokaz: Naj bo $C < \infty$ in naj bo $A_n = \{\omega :$ obstaja $s \in [0,1]$, da je $|B_t - B_s| \leq C|t-s|$ za $|t-s| \leq \frac{3}{n}\}$

Definiramo za $1 \leq k \leq n-2$

$$Y_{k,n} = \max\left\{ \left| B\left(\frac{k+j}{n}\right) - B\left(\frac{k+j-1}{n}\right) \right| : j = 0,1,2 \right\}.$$

Definiramo

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n-2} \left\{ Y_{k,n} \leq \frac{5C}{n} \right\}.$$

Po trikotniški neenakosti je $A_n \subseteq B_n$.

Ocenimo

$$P(B_n) \leq n \cdot P\left(|B_{1/n}| \leq \frac{5C}{n}\right)^3$$

$$= n \cdot P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} |B_1| \leq \frac{5C}{n}\right)^3$$

$$= n \cdot P\left(|B_1| \leq \frac{5C}{\sqrt{n}}\right)^3$$

$$\leq n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{5C}{\sqrt{n}}\right)^3 \to 0$$

Ker je $A_n \subseteq B_n$ in za vse n

velja $P(B_n) = 0$, je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ vsebovana

v množici z mero 0.

Opomba: Ne trdim, da je množica

A_n merljiva.

Velja močnejši rezultat. Z

verjetnostjo 1 je ali

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} = \infty$$

ali

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} = -\infty$$

ali oboje za vse $t \geq 0$.

Navedimo še dve preprosti lastnosti Brownovega gibanja:

(i) Če je $(B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, je tudi $(\tilde{B}_t : t \geq 0)$ z $\tilde{B}_t = \sqrt{c}\, B_{t/c}$ Brownovo gibanje.

(ii) Če je $(B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, je tudi $(\tilde{B}_t : t \geq 0)$ z $\tilde{B}_t = t \cdot B_{1/t}$ Brownovo gibanje.

Trditi preverimo tako, da za $\tilde{B}$ preverimo lastnosti v definiciji. Nekaj več dela je z drugo trditvijo, ker moramo preveriti tudi zveznost.

<u>Izrek 4.15</u>: Z verjetnostjo 1 poti Brownovega gibanja v nobeni točki $t \in [0, \infty)$ nimajo niso Lipschitz zvezne (in tudi ne odvedljive).

Dokaz: Naj bo $C < \infty$ in naj bo $A_n = \{\omega :$ obstaja $s \in [0,1]$, da je $|B_t - B_s| \leq C|t-s|$ za $|t-s| \leq \frac{3}{n}\}$

Definiramo za $1 \leq k \leq n-2$

$$Y_{k,n} = \max\left\{ \left| B\left(\frac{k+j}{n}\right) - B\left(\frac{k+j-1}{n}\right) \right| : j = 0,1,2 \right\}.$$

Definiramo

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n-2} \left\{ Y_{k,n} \leq \frac{5C}{n} \right\}.$$

Po trikotniški neenačbi je $A_n \subseteq B_n$.

Ocenimo

$$P(B_n) \leq n \cdot P\left(|B_{1/n}| \leq \frac{5C}{n}\right)^3$$

$$= n \cdot P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|B_1| \leq \frac{5C}{n}\right)^3$$

$$= n \cdot P\left(|B_1| \leq \frac{5C}{\sqrt{n}}\right)^3$$

$$\leq n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{5C}{\sqrt{n}}\right)^3 \to 0$$

Ker je $A_n \subseteq B_n$ in za vse n velja $P(B_n) = 0$, je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ vsebovana v množici z mero 0.

<u>Opomba</u>: Ne trdim, da je množica A_n merljiva.

Velja močnejši rezultat. Z verjetnostjo 1 je ali

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} = \infty$$

ali

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} = -\infty$$

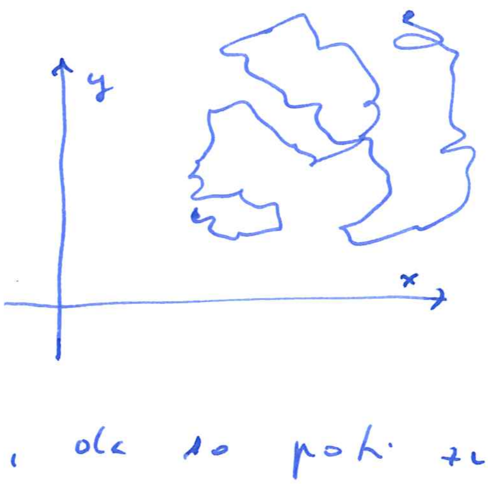
ali oboje za vse $t \geq 0$.

2. Brownovo gibanje in zvezni martingali

2.1. Brownovo gibanje

Leta 1824 je angleški botanik Robert Brown opazoval drobne delce v tekočini pod mikroskopom. Opazil je, da se delci v tekočini gibljejo naključno, njihove poti pa so povsem nepredvidljive.

Slika:



Ugotavljal je, da so poti zvezne, vendar ne moremo napovedati položaja delca. Postavimo se na stališče, da sta koordinati delca v času t naključni. Tej intuiciji moramo dati matematično podobo. Označimo z (B_t^1, B_t^2) položaj delca v času $t \geq 0$.

Smiselno je privzeti, da so pomiki delca med čisi $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \quad < t_n$ med sabo neodvisni. V jeziku verjetnosti predpostavljamo, da so vektorji $(B_{t_1}^1, B_{t_1}^2) - (B_{t_0}^1, B_{t_0}^2)$, $(B_{t_2}^1, B_{t_2}^2) - (B_{t_1}^1, B_{t_1}^2)$, ..., $(B_{t_n}^1, B_{t_n}^2) - (B_{t_{n-1}}^1, B_{t_{n-1}}^2)$ med sabo neodvisni. Ker se delci gibljejo v vse smeri enako, bo zaradi simetrije pričakovana pozicija delca enaka $(0,0)$, torej $E[(B_t^1, B_t^2)] = (0,0)$.

Zaradi neodvisnosti prirastkov bo tudi $var(B_t^1) = var(B_t^2) = ct$.

Konstanta c je odvisna od izbire enot in lahko predpostavimo, da je enaka 1.

kot zadnje opazimo, da je B_t^1 vsota „mnogih" med sabo neodvisnih prirastkov. Centralni limitni izrek nam sugerira, da bi morali biti poziciji B_t^1 in B_t^2 normalno porazdeljeni. Vse te opazke nas vodijo do definicije Brownovega gibanja. Matematično se bomo omejili na eno dimenzijo in gledali samo x-koordinato Brownovih delcev. To koordinato bomo označili z B_t za čas t. Iz vsega povedanega izhaja naslednja definicija:

<u>Definicija</u>: Brownovo gibanje je nabor slučajnih spremenljivk $\{B_t : t \geq 0\}$ na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ z naslednjimi lastnostmi:

(i) Za vsak izbor $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ so prirastki $B_{t_1} - B_{t_0}$, $B_{t_2} - B_{t_1}$, ..., $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ neodvisni.

(ii) Za poljuben t in poljuben h je razlika $B_{t+h} - B_t$ porazdeljena enako in sicer je
$$B_{t+h} - B_t \sim N(0, h).$$

(iii) Za skoraj vse $\omega \in \Omega$ je funkcija $t \longmapsto B_t(\omega)$ zvezna.

Brownovo gibanje je primer stohastičnega procesa v zveznem času. Stohastični proces v zveznem času ni nič drugega kot zbirka slučajnih spremenljivk z določenimi lastnostmi.

Kot prvo se moramo vprašati ali zbirka slučajnih spremenljivk, ki ustreza Brownovemu gibanju, obstaja.

Izrek 2.1: Obstaja verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in zbirka slučajnih spremenljivk $\{B_t : t \geq 0\}$, ki ustrezajo definiciji Brownovega gibanja.

Dokaz: Karatzas & Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, 1991, Sekcija 2.3.

Opomba: Dokaz je dolgovezen in temelji na aproksimacijah s slučajnimi sprehodi.

Brownovo gibanje je matematična formulacija intuicije, da se delec na $\mathbb{R}$ giblje povsem naključno v vsakem času in "pozabi" na svoje gibanje v preteklosti. Oglejmo si nekaj posledic definicije. Najprej potrebujemo nekaj pomožnih sredstev.

(i) Če je $\underline{X}$ slučajni vektor in poznamo $E(f(\underline{X}))$ za vse zvezne omejene funkcije $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, je s tem porazdelitev $\underline{X}$ enolično določena. Če je torej

$$E[f(\underline{X})] = E[f(\underline{Y})]$$

za slučajna vektorja $\underline{X}$ in $\underline{Y}$ za vsako zvezno funkcijo f, imata $\underline{X}$ in $\underline{Y}$ enako porazdelitev. To dejstvo je posledica teorije mere

(ii) Za funkcije f v (i) lahko celo vzamemo samo funkcije oblike

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k),$$

kjer so f_k zvezne omejene funkcije ene spremenljivke.

(iii) Rekli bomo, da je slučajni vektor $\underline{X}$ neodvisen od σ-algebre $\mathcal{G}$, če za vsako zvezno omejeno funkcijo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja

$$E[f(\underline{X}) \cdot 1_G] = E[f(\underline{X})] \cdot E(1_G)$$
$$= E[f(\underline{X})] \cdot P(G)$$

za vse $G \in \mathcal{G}$.

V primeru Brownovega gibanja označimo z $\mathcal{F}_t$ σ-algebro, ki jo generirajo slučajne spremenljivke $\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$. Družina $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ je <u>filtracija</u>, kar pomeni, da je za $t_1 < t_2$ $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$.

Zaradi neodvisnosti prirastkov Brownovega gibanja bo za $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

vektor

$$(B_{t+h_1}-B_t,\ B_{t+h_2}-B_{t+h_1},\ \dots,\ B_{t+h_n}-B_{t+h_{n-1}})$$

neodvisen od $\mathcal{F}_t$.

<u>Izrek 2.2</u>: Za vsak fiksen $t \geq 0$ je proces $\{B_{t+s}-B_t : s \geq 0\}$ Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_t$.

<u>Dokaz</u>: Sledi iz zgornjega.

<u>Opomba</u>: Med drugim iz tega sledi, da je $\{B_t\}$ markovski proces.

Preprosta posledica definicije je tudi, da je

$$E[B_{t+h}-B_t \mid \mathcal{F}_t] = $$

$$= E[B_{t+h}-B_t]$$

$$= 0,$$

torej je

$$E[B_{t+u} \mid \mathcal{F}_t] = B_t .$$

To nas močno spominja na definicijo martingala. O tem več kasneje.

Iz definicij sledi, da je gostota $(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ enaka produktu gostot zaradi neodvisnosti. Iz praktičnih razlogov bomo privzeli, da je $B_{t_0} = 0$ (koordinatni sistem si lahko sami izbiramo). Iz transformacijske formule potem sledi, da je gostota vektorja $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ enaka

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi (t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}} ,$$

kjer je $x_0 = 0$.

Definicija: Prehodna gostota Brownovega gibanja je funkcija

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}.$$

S temi oznakami lahko prepišemo gostoto $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$ kot

$$\prod_{k=1}^{n} p_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k).$$

Opomba: Formule močno spominja na markovske verige, kjer je

$$P_i(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)$$
$$= \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1}, i_k}$$

Pri markovskih verigah je pomemben koncept krepke markovske lastnosti:

Za formulacijo potrebujemo koncept časa ustavljanja, ki ga potrebujemo iz teorije martingalov.

<u>Definicija</u>: Naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija. Slučajna spremenljivka $T : \Omega \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ je čas ustavljanja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če je za vsak $t \in \mathbb{R}$

$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Vzemimo za $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ naravno filtracijo Brownovega gibanja in naj bo T čas ustavljanja, ki ima samo končno mnogo vrednosti $\{0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Iz definicij izhaja, da je $\{T = t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k}$.

<u>Definicija</u>: σ-algebra $\mathcal{F}_T$ za čas ustavljanja T je definirana kot

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ za vse } t\}$$

<u>Intuicija</u>: $\mathcal{F}_T$ je „povzetek" vsega do časa T.

Definiramo

$$\tilde{B}_s = B_{T+s} - B_T \quad \text{za} \quad s \geq 0.$$

Računamo za $A \in \mathcal{F}_T$

$$E\Big[\prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde{B}_{s_k} - \tilde{B}_{s_{k-1}}) \cdot 1_A\Big]$$

$$= E\Big[\prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde{B}_{s_k} - \tilde{B}_{s_{k-1}}) \underbrace{\sum_{j=0}^{n} 1(T = t_j)}_{=1} 1_A\Big]$$

$$= \sum_{j=0}^{n} E\Big[\prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde{B}_{s_k} - \tilde{B}_{s_{k-1}}) 1_A 1(T = t_j)\Big]$$

$$= \sum_{j=0}^{n} E\Big[\prod_{k=1}^{n} f_k(B_{t_j + s_k} - B_{t_j + s_{k-1}}) 1_A 1(T = t_j)\Big]$$

neodvisne

$$= \sum_{j=0}^{n} \prod_{k=1}^{n} E\big[f_k(B_{t_j + s_k} - B_{t_j + s_{k-1}})\big] \cdot P(\{T = t_j\} \cap A)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} E\big[f_k(B_{s_k} - B_{s_{k-1}})\big] \sum_{j=0}^{n} P(\{T = t_j\} \cap A)$$

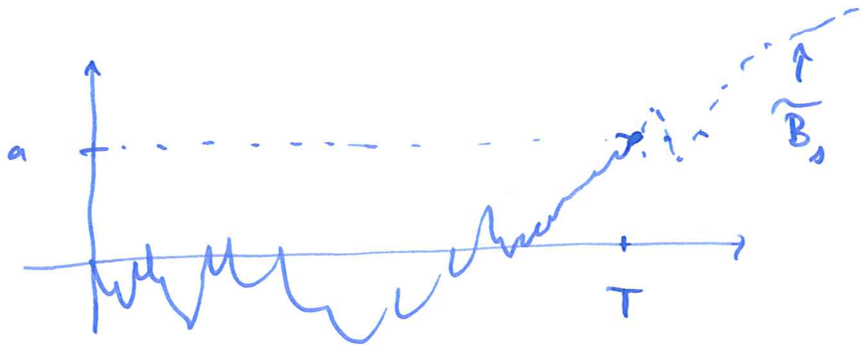
$$= \prod_{k=1}^{n} E[f_k(B_{s_k} - B_{s_{k-1}})] \cdot P(A)$$

<u>Sklep</u>: Proces $\tilde{B}_s$ je neodvisen od $A \in \mathcal{F}_T$ in enako porazdeljen kot Brownovo gibanje.

<u>Primer</u>: Recimo, da je

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$$

<u>Slika</u>:



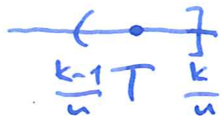
T je čas ustavljanja. Če poznamo pot Brownovega gibanja do t, potem vemo, ali je $T \leq t$ ali ne

Izrek 2.3: Naj bo T čas ustavljanja z $P(T < \infty)$ in naj bo $\tilde{B}_s = B_{T+s} - B_T$ za $s \geq 0$. Proces $\{\tilde{B}_s : s \geq 0\}$ je Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_T$.

Opomba: Zgornji lastnosti rečemo krepka lastnost Markova ali krepka markovska lastnost.

Dokaz: Razmislek, ki smo ga navedili za T s končno mnogo vrednostmi, velja tudi za čase ustavljanja z diskretnim naborom vrednosti. Definirajmo

$$T^n = \frac{1}{n} \lceil nT \rceil$$

Slika: če je  , potem je $T^n = \frac{k}{n}$.

Za T^n velja krepka markovska lastnost, zato je za $\hat{B}^n_s = B_{T^n+s} - B_{T^n}$

$$E\Big[\prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde{B}^n_{s_k} - \tilde{B}^n_{s_{k-1}}) \cdot 1_A\Big]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} E\big[f_k(B_{s_k} - B_{s_{k-1}})\big] \cdot P(A)$$

Po drugi strani $T^n \downarrow T$, zato zaradi zveznosti Brownovega gibanja $\tilde{B}^n_{s_k} - \tilde{B}^n_{s_{k-1}} \to \tilde{B}_{s_k} - \tilde{B}_{s_{k-1}}$. Ker so f_k omejene po izreku o dominirani konvergenci

$$E\Big[\prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde{B}^n_{s_k} - \tilde{B}^n_{s_{k-1}})\Big]$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} E\Big[\prod_{k=1}^{n} f_k(\hat{B}_{s_k} - \hat{B}_{s_{k-1}})\Big]$$

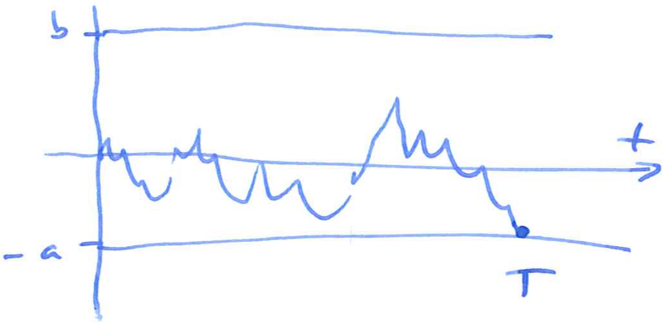
S tem je krepka markovska lastnost dokazana.

Oglejmo si še nekaj časov ustavljanja

(i) $T_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : B_t \in \{-a, b\}\}$

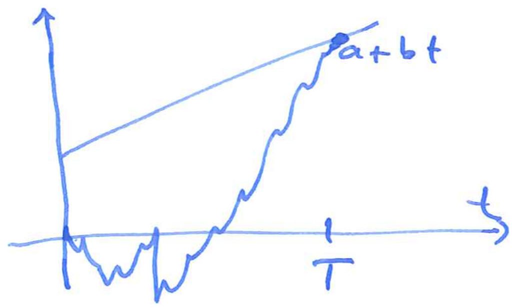
za $a, b > 0$

Slika :



(ii) $T = \inf\{t \geq 0 : B_t = a + bt\}$

Slika :

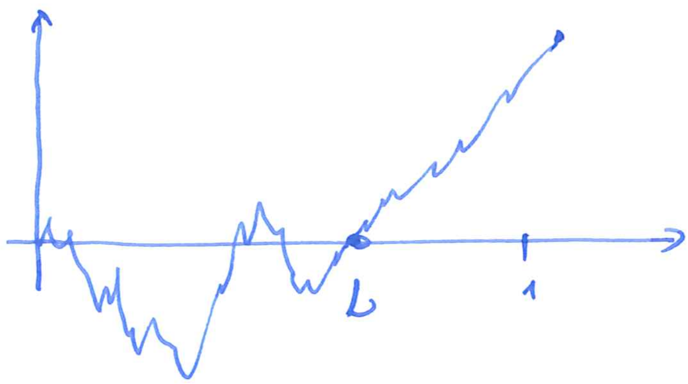


Ta čas ustavljanja ni nujno končen.

Še primer, ko T ni čas ustavljanja.

$$L = \sup\{t \in [0,1] : B_t = 0\}$$

Slika:



Če vam pokažem pot Brownovega gibanja do časa $t < 1$, ali veste da je $L \leq t$ ali ne? Ne!

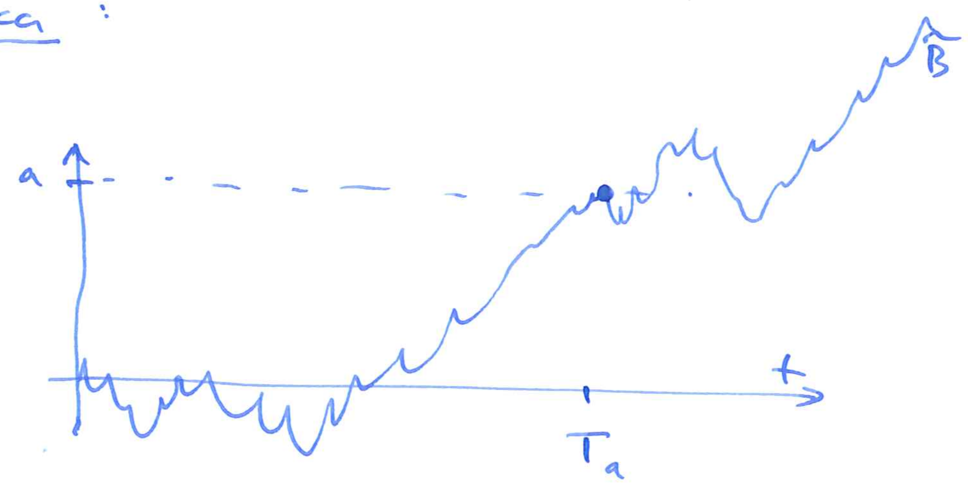
Brownovo gibanje se med t in 1 lahko vrne v 0!

Princip zrcaljenja

Vzemimo čas ustavljanja

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}.$$

Slika :



Krepka lastnost Markova pove, da je $\tilde{B}_s = B_{T+s} - B_T$ Brownovo gibanje neodvisno od $\mathcal{F}_{T_a}$.

Iz definicije sledi, da je $-B$ Brownovo gibanje, če je B Brownovo gibanje.

Po času T_a lahko Brownovo gibanje „podaljšamo" s katerimkoli neodvisnim Brownovim gibanjem (neodvisnim od $\mathcal{F}_{T_a}$). Tako neodvisno gibanje je lahko $-\hat{B}$. Označimo to tretje Brownovo gibanje z $\hat{B}$. Naj bo $x < a$. Izračunati želimo

$$P\left(\max_{0 \le s \le t} B_t \ge a,\ B_t \le x\right).$$

Ta verjetnost je enaka

$$P\left(\max_{0 \le s \le t} \hat{B}_t \ge a,\ \hat{B}_t \le x\right)$$

Ampak (glej sliko) ta verjetnost je enaka

$$P\left(\max_{0 \le s \le t} B_s \ge a,\ \underbrace{B_t \ge 2a - x}_{\text{zrcaljenje čez } a}\right)$$

Če je $B_t \geq 2a - x$ je tudi

$\max\limits_{0 \leq s \leq t} B_s \geq a$, torej je

$$P\left(\max_{0 \leq s \leq t} B_t \geq a, B_t \leq x \right)$$

$$= P\left(B_t \geq 2a - x \right)$$

Označimo $\overline{B}_t = \max\limits_{0 \leq s \leq t} B_s$. S

temi oznakami je

$$P(\overline{B}_t \geq a, B_t \leq x) = P(B_t \geq 2a - x)$$

V načelu smo našli porazdelitev

para $(\overline{B}_t, B_t)$. Računamo s

tem, da je $P(B_t \geq 2a - x) =$

$1 - \Phi\left(\frac{2a - x}{\sqrt{t}} \right)$:

$$-\frac{\partial^2}{\partial a \partial x}\left(1-\Phi\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial a}\Phi'\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(2a-x)^2}{2t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{2(2a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\cdot e^{-\frac{(2a-x)^2}{2t}}$$

za $a > x$. Če integriramo po x od $-\infty$ do a dobimo gostoto $\overline{B}_t$. Računamo

$$\int_{-\infty}^{a} f_{\overline{B}_t, B_t}(a,x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

To pomeni, da ima $\overline{B}_t$ enako porazdelitev kot $|B_t|$.

Velja še:

$$\{T_a \le t\} = \{\overline{B}_t \ge a\},$$

torej je

$$P(T_a \le t) = P(|B_t| \ge a)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

Odvajamo in dobimo

$$\boxed{f_{T_a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}}$$

2.3. Zvezni martingali

Za namene stohastične integracije bomo najprej nekoliko razširili definicijo Brownovega gibanja. Kot smo rekli, je filtracija $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ družina naraščajočih σ-algeber na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

<u>Definicija</u>: Privzeli bomo, da vsak $\mathcal{F}_t$ vsebuje vse dogodke $A \in \mathcal{F}$ z $P(A) = 0$ in je družina $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ desno zvezna v smislu $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$. Tem pogojem bomo rekli „običajni pogoji" in jih bomo privzeli.

<u>Definicija</u>: Slučajni proces $(B_t : t \geq 0)$ je Brownovo gibanje glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če velja:

(i) za $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ so slučajne spremenljivke $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$

med seboj neodvisne.

(ii) Za $t, h > 0$ je slučajna spremenljivka $B_{t+h} - B_t$ neodvisna od $\mathcal{F}_t$ in $N(0,h)$ porazdeljena.

(iii) Za skoraj vse $\omega \in \Omega$ je funkcija $t \mapsto B_t(\omega)$ zvezna.

Opazili smo, da je $(B_t : t \geq 0)$ martingal v zveznem času v smislu, da je

$$E(B_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) = B_t \quad \text{za} \quad t, s \geq 0.$$

To nas napeljuje na naslednjo definicijo.

<u>Definicija</u>: Stohastični proces $(M_t : t \geq 0)$ je martingal glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, če velja

(i) M_t je merljiv glede na $\mathcal{F}_t$ za $t \geq 0$

(ii) $E(|M_t|) < \infty$ za $t \geq 0$

(iii) $E(M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) = M_s$ za $t, s \geq 0$.

Če je funkcija $t \mapsto M_t(\omega)$ zvezna za skoraj vse $\omega \in \Omega$, rečemo da je M martingal v zveznem času.

Primera:

(i) $M_t = B_t^2 - t$.

Ker je $|M_t| \leq B_t^2 + t$, velja $E(|M_t|) < \infty$. Računamo

$$E(M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= E\left(B_{t+s}^2 - (t+s) \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= E\left[(B_{t+s} - B_t)^2 + 2B_t \cdot B_{t+s} - B_t^2 \mid \mathcal{F}_t\right] - (t+s)$$

$$= s + 2B_t E(B_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) - B_t^2 - (t+s)$$

$$= B_t^2 - t.$$

M je zvezen martingal.

(iii) Nekoliko bolj zahteven je naslednji primer. Naj bo

$$M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}.$$

Iz verjetnosti poberemo, da za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ velja

$$E(e^{\lambda X}) = e^{\lambda \mu + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}}.$$

Iz tega vidimo, da je $E(|M_t|) < \infty$.

Računamo

$$E(M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= E\left(e^{\lambda B_{t+s} - \frac{\lambda^2}{2}(t+s)} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= E\left(e^{\lambda(B_{t+s} - B_t)} \cdot e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}(t+s)} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \underbrace{E\left(e^{\lambda(B_{t+s} - B_t)}\right)}_{\text{neodvisnost}} \cdot e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}(t+s)}$$

$$= \underbrace{e^{\frac{\lambda^2 s}{2}}}_{B_{t+s} - B_t \sim N(0,s)} \cdot e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}(t+s)}$$

$$= e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}$$

$$= M_t .$$

Pri diskretnih martingalih je bil najpomembnejši rezultat izrek o opcijskem ustavljanju. Izrek velja tudi za zvezne martingale, vendar ima dokaz tehnično težavico.

<u>Lema 2.4</u>: Naj velja za družino slučajnih spremenljivk, da $X_n \xrightarrow{s.g.} X$ in je $E(|X|) < \infty$ ter je družina $\{X_n\}$ enakomerno integrabilna.

Potem velja

$$E(|X_n - X|) \to 0, \text{ ko } n \to \infty$$

Dokaz: Za dan ε izberimo $K > 0$, da bo $E[|X_n| \cdot 1(|X_n| \geq K)] < \varepsilon$ in $E[|X| \cdot 1(|X_n| \geq K)] < \varepsilon$. Definirajmo funkcijo φ_K z

$$\varphi_K(x) = \begin{cases} K & \text{za } x > K \\ x & \text{za } |x| \leq K \\ -K & \text{za } x < -K. \end{cases}$$

φ_K je zvezna, zato $\varphi_K(X_n) \xrightarrow{s.g} \varphi_K(X)$. Ker je $|\varphi_K|$ omejena s K, po izreku o dominirani konvergenci

$$E[|\varphi_K(X_n) - \varphi_K(X)|] \to 0, \text{ ko } n \to \infty$$

Za dan ε obstaja N_ε, da za $n \geq N_\varepsilon$ velja $E[|\varphi_K(X_n) - \varphi_K(X)|] < \varepsilon$.

Velja še

$$\begin{aligned} E[|\varphi_K(X_n) - X_n|] &\leq E[|X_n| \cdot 1(|X_n| \geq K)] \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

in podobno

$$E[\,|\varphi_k(X) - X|\,] \leq E[\,|X| \cdot \mathbb{1}(|X| \geq k)\,]$$

$$< \varepsilon .$$

Sledi

$$E[\,|X_n - X|\,]$$

$$\leq E[\,|X_n - \varphi_k(X_n)| + |\varphi_k(X_n) - \varphi_k(X)|$$

$$+ |\varphi_k(X) - X|\,]$$

$$< 3\varepsilon \quad \text{za} \quad n \geq N_\varepsilon .$$

S tem je izrek dokazan.

<u>Izrek 2.5</u>: (izrek o opcijskem ustavljanju). Naj bo $(M_t : t \geq 0)$ zvezen martingal in naj bo T omejen čas ustavljanja. Potem

$$E[M_T] = E[M_0].$$

Dokaz: Recimo, da je $T \leq C < \infty$.

Privzemimo najprej, da ima T samo nekaj diskretnih vrednosti $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subseteq [0, C]$. Za σ-algebro $\mathcal{F}_T$ velja, da vsebuje dogodke, za katere je $A \cap \{T = t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k}$ za vse $k = 1, 2, \ldots, n$; Računamo za $A \in \mathcal{F}_T$

$$
\begin{aligned}
E[M_T \cdot 1_A] &= E\Big[M_T \cdot 1_A \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1(T = t_k)}_{=1}\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} E[M_T \cdot 1_A \cdot 1(T = t_k)] \\
&= \sum_{k=1}^{n} E[M_{t_k} \cdot \underbrace{1_A \cdot 1(T = t_k)}_{\in \mathcal{F}_{t_k}}]
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E[M_c \cdot 1_A \cdot 1(T = t_k)]$$

$\uparrow$

Definicija martingala

$$= E[M_c \cdot 1_A]$$

Ugotavljamo, da je $M_T = E[M_c \mid \mathcal{F}_T]$.

Iz tega sledi $E(M_T) = E[M_c]$

$= E(M_0)$.

Naj bo T splošen omejen čas ustavljanja. Definirajmo

$$T^n = \begin{cases} 0, & \text{če je } T = 0. \\ \frac{c}{n} \lceil n \cdot \frac{T}{c} \rceil, & \text{če je } T > 0. \end{cases}$$

Velja $T^n \downarrow T$ in zaradi zveznosti $M_{T^n} \xrightarrow{s.g.} M_T$. Ker ima T^n samo diskreten nabor vrednosti, je $E(M_{T^n}) = E(M_0)$.

Za zaključek dokaza nam manjka samo še to, da $E(M_{T_n}) \to E(M_T)$.

Po Fatoujevi lemi je

$$E(|M_T|) = E[\liminf_{n\to\infty} |M_{T_n}|]$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} E[|M_{T_n}|].$$

Vendar podoben račun kot na začetku pokaže, da je

$$E[|M_{T_n}|] \leq E[|M_c|].$$

Torej je $M_T \in \mathcal{L}^1$. Družina $\{M_{T_n} : n \geq 1\}$ je enakomerno integrabilna, zato ker je $M_{T_n} = E(M_c \mid \mathcal{F}_{T_n})$. Po izreku 2.4. potem

$$|E(M_{T_n}) - E(M_T)|$$

$$\leq E[|M_{T_n} - M_T|] \to 0, \text{ ko } n \to \infty.$$

Primera:

(i) Tipično nas zanimajo primeri, ko T ni omejen s konstanto. V tem primeru vzamemo namesto T čas ustavljanja $T \wedge t = \min(T, t)$. Za tega je

$$E[M_{T\wedge t}] = E[M_0].$$

Če je $P(T < \infty) = 1$ in je M zvezen, $M_{T\wedge t} \to M_T$, ko $t \to \infty$. Navadno lahko z izreki iz teorije mere utemeljimo, da

$$E(M_{T\wedge t}) \to E(M_T).$$

Vzemimo

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \in \{-a, b\}\}$$

za $a, b > 0$.

Vzemimo $M_t = B_t^2 - t$. Velja

$$E[M_{t\wedge T}] = E(M_0) = 0.$$

Z drugimi besedami

$$E(B_{t\wedge T}^2) = E(t\wedge T).$$

Hitro se lahko prepričamo (vaje), da je $P(T<\infty) = 1$.

Zaradi zveznosti je potem

$$B_{t\wedge T}^2 \xrightarrow{s.g} B_T^2, \quad \text{ko } t\to\infty$$

in je $|B_{t\wedge T}^2| \leq \max(a^2, b^2)$.

Po izreku o dominirani konvergenci

$$E(B_{t\wedge T}^2) \to E(B_T^2).$$

Ko $t\to\infty$, $T\wedge t \uparrow T$. Po izreku o monotoni konvergenci

$$E(T\wedge t) \uparrow E(T).$$

Sledi, da je $E(B_T^2) = E(T)$.

Na vajah boste dokazali, da je $P(B_T = -a) = \frac{b}{a+b}$ in

$P(B_T = b) = \frac{a}{a+b}$. Sledi

$$E(B_T^2) = a^2 \cdot \frac{b}{a+b} + b^2 \cdot \frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{ab(a+b)}{a+b}$$

$$= a \cdot b$$

(ii) Naj bo $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}$

in $T = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$

za $a > 0$. Privzemite, da je $P(T < \infty) = 1$. Velja

$$E[M_{T \wedge t}] = E(M_0) = 1.$$

Vendar je $B_{t\wedge T} \leq a$, zato je $M_{t\wedge T} \leq e^{\lambda a}$. Po izreku o dominirani konvergenci

$$E(M_{t\wedge T}) \to E(M_T), \quad t \to \infty.$$

Sledi

$$E\left[e^{\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2} T} \right] = 1.$$

Ampak $B_T = a$, zato

$$E\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2} T} \right] = e^{-\lambda a}$$

Opomba: Poskusite to izračunati iz znane gostote T!

Opomba: Izračunali smo Laplaceovo transformacijo T.

Zapisano drugače je

$$E\left[e^{-\theta T} \right] = e^{-a\sqrt{2\theta}}$$