Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Pisni izpit

16. junij 2020

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.				•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Imamo m kart, ki so označene z $1, 2, \ldots, m$. Karte dobro premešamo in jih delimo eno po eno z vrha. Naj bo B_k dogodek, da je k-ta karta po vrsti imela največjo oznako med **do tedaj** razdeljenimi kartami, z A_k pa dogodek, da je k-ta karta označena z m.

a. (10) Izračunajte verjetnosti dogodkov B_k.

Namig: prvih k kart je z enako verjetnostjo v katerem koli vrstnem redu.

Rešitev: Zaradi simetrije je prvih k kart lahko v poljubnem vrstnem redu. Ker so vse označene z različnimi številkami, je verjetnost, da bo največja na koncu, enaka $1/k$.

b. (10) Izračunajte $P(A_k|B_k)$.

Rešitev: Po definiciji je

$$P(A_k|B_k) = \frac{P(A_k \cap B_k)}{P(B_k)}\,.$$

Dogodek $A_k \cap B_k$ je dogodek, da na k-tem mestu dobimo m. Zaradi simetrije je $P(A_k \cap B_k) = 1/m$. Sledi

$$P(A_k|B_k) = \frac{k}{m}\,.$$

2. (20) Gospodinja preveri shrambo in ugotovi, da manjka N stvari. To število je slučajno, in sicer je $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, kjer je $\lambda > 0$ znano število. Če je $N > 0$, napiše možu listek in ga pošlje v trgovino. Toda ko mož pride v trgovino, ugotovi, da je pozabil listek doma, prav tako pa tudi telefon. A vsake stvari se spomni z verjetnostjo $p > 0$, pri čemer so stvari med seboj neodvisne.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da gre mož v trgovino in se spomni vsega?

Rešitev: Iskana verjetnost je enaka:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} p^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p\lambda)^n e^{-\lambda}}{n!} - e^{-\lambda} = e^{-(1-p)\lambda} - e^{-\lambda} .$$

b. (10) Recimo, da je mož res šel v trgovino in se spomnil vsega. Določite pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke N glede na ta dogodek.

Rešitev: Če dani dogodek označimo z S, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ velja

$$P(N = n | S) = \frac{(p\lambda)^n}{n!\big(e^{p\lambda} - 1\big)} .$$

3. (20) Slučajna spremenljivka T_a naj ima gostoto

$$f_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

za $a > 0$ in $t > 0$. Kot znano privzemite, da za ima za neodvisni slučajni spremenljivki T_a in T_b z gostotama f_a in f_b vsota $T_a + T_b$ gostoto f_{a+b}.

a. (10) Naj bo $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ neodvisna od T_a. Poiščite gostoto slučajne spremenljivke $W = \sqrt{T_a}\, Z$.

Rešitev: Definiramo preslikavo

$$\Phi(t,z) = \big(t, z\sqrt{t}\,\big)\,.$$

Velja

$$\Phi^{-1}(t,w) = \big(t, w/\sqrt{t}\,\big) \qquad \text{in} \qquad J_{\Phi^{-1}}(t,w) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,.$$

Par (T_a, W) ima gostoto

$$f_{T_a,W}(t,w) = f_a(t)\, f_Z\left(\frac{w}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\,.$$

Gostoto slučajne spremenljivke W dobimo kot robno gostoto. Računamo

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}\, e^{-\frac{w^2}{2t}}\, dt \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{(a^2+w^2)v}{2}} dv \\ &= \frac{a}{\pi(a^2+w^2)}\,. \end{aligned}$$

b. (10) Naj bodo T_a,T_b, Z_1, Z_2, Z neodvisne, T_a, T_b naj imata gostoti f_a in f_b ter $Z_1, Z_2, Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Utemeljite, da imata slučajni spremenljivki

$$U = \sqrt{T_a}\, Z_1 + \sqrt{T_b}\, Z_2 \qquad \text{in} \qquad V = \sqrt{T_a + T_b}\, Z$$

enako gostoto. Kako sta torej porazdeljeni?

Namig: kaj je $f_{U|T_a=t,T_b=s}(u)$?

Rešitev: Iz predpostavk o neodvisnosti sledi

$$U|_{T_a=t,T_b=s} \sim \mathrm{N}(0, t+s)\,.$$

Po drugi strani je

$$V|_{T_a+T_b=t} \sim \mathrm{N}(0,t)\,.$$

Ker velja, da imata $T_a + T_b$ in T_{a+b} enako gostoto, sklep sledi. Po prejšnji točki je njuna porazdelitev zvezna z gostoto

$$f_U(u) = \frac{a+b}{\pi((a+b)^2+u^2)}\,.$$

4. (20) Naj bo $X_1 = 1$. Privzemite, da za $n = 2, 3, \ldots$ velja

$$P\left(X_{n+1} = k | X_n = k\right) = \frac{n+1-k}{n+1} \quad \text{in} \quad P\left(X_{n+1} = k+1 | X_n = k\right) = \frac{k}{n+1}$$

za $k = 1, \ldots, n$. Naj bo

$$Y_n = \frac{X_n(X_n+1)}{(n+1)(n+2)}\,.$$

a. (10) Izračunajte

$$E\left(Y_{n+1} | X_n = k\right)\,.$$

Rešitev: Po definiciji je

$$\begin{aligned} E&\left(\frac{X_{n+1}(X_{n+1}+1)}{(n+2)(n+3)} | X_n = k\right) \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+3)}\left(k(k+1)\cdot\frac{n+1-k}{n+1} + (k+1)(k+2)\frac{k}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot k(k+1)((n+1-k)+(k+2)) \\ &= \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X_n)$.

Rešitev: Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n} E(Y_{n+1} | X_n = k)\, P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}\, P(X_n = k) \\ &= E(Y_n)\,. \end{aligned}$$

Opazimo, da je $E(Y_1) = 1/3$*, torej za vse* n *velja* $E(Y_n) = 1/3$*. Sledi*

$$E\big(X_n(X_n+1)\big) = \frac{(n+1)(n+2)}{3}\,.$$

Za izračun variance potrebujemo $E(X_n)$*. Iz pogojne porazdelitve dobimo*

$$E(X_{n+1}) = \frac{n+2}{n+1}\,E(X_n)\,,$$

kar nam da $E(X_1) = 1$ *in* $E(X_n) = \frac{1}{2}(n+1)$*. Sledi*

$$\mathrm{var}(X_n) = E(X_n(X_n+1)) - E(X_n) - E(X_n)^2\,,$$

kar nam da

$$\mathrm{var}(X_n) = \frac{n^2-1}{12}\,.$$

5. (20) Privzemite, da se kolonija bakterij začne v času $n = 0$ z eno bakterijo. Vsaka obstoječa bakterija se od časa n do časa $n+1$ razdeli na dvoje z verjetnostjo p, neodvisno od ostalih bakterij. Označite število bakterij v trenutku n z Z_n in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n z G_n.

a. (10) Izrazite G_{n+1} z G_n.

Rešitev: Pogojno na $\{Z_n = k\}$ je porazdelitev slučajne spremenljivke Z_{n+1} enaka kot porazdelitev vsote $k + Y$, kjer je $Y \sim \mathrm{Bin}(k, p)$. Sledi

$$E\big(s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = k\big) = s^k (ps + q)^k ,$$

kjer je $q = 1 - p$. Iz formule za pogojno pričakovano vrednost dobimo

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= E\big(s^{Z_{n+1}}\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\big(s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = k\big)\, P(Z_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k (ps+q)^k\, P(Z_n = k) \\ &= G_n\big(s(ps+q)\big) . \end{aligned}$$

b. (5) Pokažite, da je $E(Z_n) = (1+p)^n$.

Rešitev: Vemo, da je $E(Z_n) = G_n'(1)$. Odvajamo rekurzivno formulo na levi in na desni. Dobimo

$$G_{n+1}'(s) = G_n'\big(s(q+ps)\big)(q + 2ps) .$$

Vstavimo $s = 1$ in sledi

$$E(Z_{n+1}) = E(Z_n) \cdot (1+p) .$$

Ker je $E(Z_0) = 1$, sledi, da je

$$E(Z_n) = (1+p)^n .$$

c. (5) Izračunajte $P(Z_n = 2^n)$.

Rešitev:

Prvi način. *Rodovne funkcije G_n so polinomi z najvišjo stopnjo 2^n. Naj bo a_n koeficient pri potenci s^{2^n} v G_n. Koeficient pri najvišji potenci v G_{n+1} bo $a_n p^{2^n}$. Po indukciji sledi*

$$a_n = p^{2^n - 1} .$$

Drugi način. *Dogodek $\{Z_n = 2^n\}$ je dogodek, da se vse bakterije na vsakem koraku razdelijo. Najprej je to ena bakterija, nato dve, na koraku od časa $n-1$ do časa n se mora razdeliti 2^{n-1} bakterij. Torej je*

$$P(Z_n = 2^n) = p^{1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}} = p^{2^n - 1} .$$

6. (20) Iz množice $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ izberemo slučajne podmnožice $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Izbire so neodvisne, vsakič pa je vsaka od 2^n podmnožic izbrana z enako verjetnostjo.

a. (10) Naj bo $X = \mathrm{card}(\cup_{j=1}^r A_j)$. Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

Namig:

$$I_i = \begin{cases} 1\,, & \textit{če je } i \in \cup_{j=1}^r A_j \\ 0\,, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Rešitev: Uporabimo alternativno konstrukcijo množic A_j, pri kateri najprej izvedemo nr neodvisnih poskusov z verjetnostjo uspeha $1/2$. Poskuse indeksiramo z indeksi (i, j), $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Nato definiramo A_j kot množico vseh indeksov i, za katere je poskus z indeksom (i, j) uspel. Ni težko videti, da je ta konstrukcija ekvivalentna izvirni.

Če se torej množica A_j nanaša na j-ti stolpec, se indikator I_i nanaša na i-to vrstico: to je indikator dogodka, da uspe vsaj en poskus iz i-te vrstice. Ker so poskusi neodvisni, velja

$$P(I_i = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^r, \qquad P(I_i = 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r.$$

Ker je $X = I_1 + \cdots + I_n$, sledi

$$E(X) = n\, E(I_1) = n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r\right).$$

A iz neodvisnosti poskusov pri alternativni konstrukciji množic A_j sledi, da so tudi indikatorji $I_1, \ldots, I_n$ neodvisni. Torej je

$$\mathrm{var}(X) = n\, \mathrm{var}(I_1) = n \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r\right).$$

b. (10) Za vsak $i \in U$ naj bo

$$X_i = \sum_{j=1}^r \mathbf{1}(i \in A_j)\,.$$

Za $0 \le k_i \le r$ izračunajte

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n)\,.$$

Rešitev: Slučajna spremenljivka X_i "šteje", v koliko množicah je element $i \in U$. V duhu alternativne konstrukcije množic A_j iz nabora nr neodvisnih poskusov (glej rešitev prejšnje točke) se slučajna spremenljivka X_i nanaša na i-to vrstico. Ker so poskusi neodvisni, so tudi slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne z $X_i \sim \mathrm{Bin}(r, 1/2)$, kar pomeni

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) = \frac{1}{2^{nr}} \binom{r}{k_1} \binom{r}{k_2} \cdots \binom{r}{k_n}.$$