Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Pisni izpit

27. avgust 2020

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.				•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

REŠITVE

1. (20) Prvih milijon nenegativnih celih števil zapišemo kot 000000, 000001,...,999999. Naključno izberemo eno od števil, tako da imajo vsa števila enako verjetnost izbire.

a. (10) Naj bo A_i dogodek, da se v naključno izbranem številu števka i pojavi natanko dvakrat. Naj bodo $0 \leq i, j, k \leq 9$ različna števila. Izračunajte verjetnosti $P(A_j \cap A_i)$ in $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$.

   Rešitev: Na 6 pozicijah se števke pojavljajo neodvisno ena od druge. Dogodek $A_i \cap A_j$ se lahko zgodi na različne načine. Dve poziciji za i in dve poziciji za j lahko izberemo na $\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} = 90$ načinov. Sledi

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{90 \cdot 8^2}{10^6} = \frac{5760}{10^6}\,.$$

   S podobnim razmislekom dobimo

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{90}{10^6}\,.$$

b. (10) Izračunajte verjetnost, da se vsaj ena od števk 0,1,2,...,9 pojavi natanko dvakrat.

   Rešitev: Podobno kot v prvem delu ugotovimo, da je

$$P(A_i) = \frac{15 \cdot 9^4}{10^6} = \frac{98415}{10^6}\,.$$

   Po formuli za vključitve in izključitve in upoštevanjem, da so preseki več kot treh dogodkov A_i nemogoči dogodki, sledi

$$P\left(\cup_{i=0}^{9} A_i\right) = 10 \cdot P(A_0) - \binom{10}{2} P(A_0 \cap A_1) + \binom{10}{3} P(A_0 \cap A_1 \cap A_2) = \frac{735750}{1000000}\,.$$

2. (20) Naj bo π permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Če je $\pi(i) > \pi(i-1)$ pravimo, da ima permutacija prirastek v točki $i \geq 2$. Označimo z X_n število vseh prirastkov permutacije.

a. (10) Privzemite, da izbirate permutacije naključno, tako da imajo vse enako verjetnost $\frac{1}{n!}$, da bodo izbrane. V tem primeru je X_n slučajna spremenljivka. Izračunajte $E(X_n)$.

   Rešitev: Zapišimo

$$X_n = \sum_{i=2}^{n} 1(\pi(i-1) < \pi(i))\,,$$

   torej

$$E(X_n) = \sum_{i=2}^{n} P(\pi(i-1) < \pi(i)) = \frac{n-1}{2}\,.$$

   Uporabili smo simetrijo.

b. (10) Označite $p_n(k) = P(X_n = k)$. Izpeljite rekurzivno formulo

$$p_n(k) = \frac{k+1}{n}\, p_{n-1}(k) + \frac{n-k}{n}\, p_{n-1}(k-1)\,.$$

   Namig: Kako lahko iz permutacije množice $\{1, 2 \ldots, n-1\}$ dobimo permutacijo množice $\{1, 2 \ldots, n\}$?

   Rešitev: Permutacijo množice $\{1, 2 \ldots, n\}$ iz permutacije množice $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ tvorimo tako, da element n vrinemo na eno od možnih n mest. Če so pogojno na manjšo permutacijo vse možnosti enako verjetne, se ohrani, da so vse možne permutacije enako verjetne. Kaj se pri tem zgodi s prirastki?

   - *Če vrinemo n pred prvi element, se število prirastkov ne spremeni.*
   - *Če vrinemo n med $(i-1)$-ti in i-ti element ter je $\pi(i-1) < \pi(i)$, se število prirastkov ne spremeni.*
   - *Če vrinemo n med $(i-1)$-ti in i-ti element ter je $\pi(i-1) > \pi(i)$, se število prirastkov poveča za 1.*
   - *Če vrinemo n za zadnji element, se število prirastkov poveča za 1.*

   Pogojno na dogodek, da ima manjša permutacija natanko k prirastkov, ima torej večja permutacija k prirastkov z verjetnostjo $(k+1)/n$ in $k+1$ prirastkov z verjetnostjo $(n-k-1)/n$. Zdaj pa poglejmo obratno: večja permutacija ima natanko k prirastkov, če ima manjša permutacija bodisi k prirastkov (v tem primeru je pogojna verjetnost enaka $(k+1)/n$) bodisi $k-1$ prirastkov (v tem primeru je pogojna verjetnost enaka $(n-(k-1)-1)/n = (n-k)/n$). Rezultat zdaj sledi iz formule za popolno verjetnost.

3. (20) Slučajni par (T, X) naj ima gostoto

$$f_{T,X}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

za $t > 0$ in $x \in \mathbb{R}$.

a. (10) Naj bosta para (T, X) in (T', X') neodvisna z enako gostoto. Označite $(T + T', X + X') = (S, Y)$. Pokažite, da je gostota para (S, Y) enaka

$$f_{S,Y}(s,y) = f_S(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{y^2}{2s}}\,.$$

Rešitev: Označimo $(T + T', X + X') = (S, Y)$*. Definiramo preslikavo*

$$\Phi(t, x, t', x') = (t, x, t + t', x + x')\,.$$

Velja

$$\Phi^{-1}(t, x, s, y) = (t, x, s - t, y - x)$$

za $s > t$*. Jacobian preslikave je* 1*. Sledi*

$$f_{T,X,S,Y}(t, x, s, y) = f_{T,X}(t, x) f_{T,X}(s - t, y - x)\,.$$

Iskana gostota je robna gostota, zato moramo integrirati po t *in* x*. Računamo*

$$\begin{aligned}
f_{S,Y}(s,y) &= \int_0^s dt \int_{-\infty}^{\infty} f_{T,X,S,Y}(t,x,s,y) dx \\
&= \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi (s-t)^3}} e^{-\frac{1}{2(s-t)}} dt \,\cdot \\
&\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi (s-t)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(s-t)}} dx \\
&= \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi (s-t)^3}} e^{-\frac{1}{2(s-t)}} dt \\
&\qquad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{y^2}{2s}} \\
&= f_{T+T'}(s) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{y^2}{2s}}\,.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je notranji integral konvolucija dveh normalnih gostot, zunanji pa konvolucija gostot T *in* T'*.*

b. (10) Kot znano privzemite, da imata slučajni spremenljivki $4T$ in S enako gostoto. Izračunajte gostote X, X' in $X + X'$.

Rešitev: Gostoto X *oziroma* X' *dobimo kot robno gostoto para* (T, X)*. Integracija nam da*

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\,.$$

Iz znanega dejstva sledi

$$f_S(s) = \frac{2}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{2}{s}} \, .$$

Gostoto Y dobimo kot robno gostoto gostote iz prvega dela naloge. Integracija nam da

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi(4 + y^2)} \, .$$

4. (20) Elementi matrike $\mathbf{A}$ velikosti $n \times n$ naj bodo med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke X_{ij} s $P(X_{ij} = 1) = P(X_{ij} = -1) = 1/2$.

a. (10) Naj bosta σ in τ permutaciji n elementov. Izračunajte

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} X_{i\tau(i)}\right).$$

Rešitev: Zaradi neodvisnosti parov $(X_{1\sigma(1)}, X_{1\tau(1)}), \ldots, (X_{n\sigma(n)}, X_{n\tau(n)})$ *je*

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} X_{i\tau(i)}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(X_{i\sigma(i)} X_{i\tau(i)}\right).$$

Posamezna pričakovana vrednost $E\left(X_{i\sigma(i)} X_{i\tau(i)}\right)$ *je enaka* 1, *če je* $\sigma(i) = \tau(i)$, *sicer pa je zaradi neodvisnosti enaka* 0. *Celotna pričakovana vrednost je zato enaka* 1, *če je* $\sigma = \tau$, *sicer pa je enaka* 0.

b. (10) Izračunajte $\operatorname{var}(\det(\mathbf{A}))$.

Rešitev: Pišimo

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)}.$$

Ker za vsako permutacijo σ *velja*

$$E\big[X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)}\big] = EX_{1\sigma(1)} \cdots EX_{n\sigma(n)} = 0,$$

je $E\big[\det(\mathbf{A})\big] = 0$, *zato je*

$$\operatorname{var}(\det(\mathbf{A})) = E\big[(\det(\mathbf{A}))^2\big] = \sum_{\sigma}\sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\, E\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} X_{i\tau(i)}\right).$$

Toda po prejšnji točki so vsi členi, pri katerih je $\sigma \neq \tau$, *enaki nič, členi, pri katerih je* $\sigma = \tau$, *pa so enaki* 1. *Zato je*

$$\operatorname{var}(\det(\mathbf{A})) = n!.$$

5. (20) V igri *Book of Ra* vsaka igra lahko z verjetnostjo p generira $m \geq 2$ nagradnih iger, z verjetnostjo $q = 1 - p$ pa ne generira nobene igre. Vsaka nagradna igra lahko spet z verjetnostjo p generira m nagradnih iger, te pa lahko spet z verjetnostjo p generirajo m nagradnih iger, … Predpostavite, da so vse igre med sabo neodvisne. Predpostavite še, da je $mp < 1$. Naj bo N število iger, ki jih bo igralec odigral za eno stavo.

a. (10) Utemeljite, da bo igralec za eno stavo odigral le končno število iger.

Rešitev: Vsaka igra lahko ima 0 *ali* m *"potomcev", ki lahko imajo spet* 0 *ali* m *"potomcev". Vprašanje je enako kot vprašanje izumrtja pri procesih razvejanja. Pričakovano število "potomcev" je* mp. *Pri zgornji predpostavki proces razvejanja izumre z verjetnostjo* 1*, tako da bo igralec z gotovostjo igral samo končno mnogo iger.*

b. (5) Naj bo G rodovna funkcija števila odigranih iger. Utemeljite, da je

$$G(s) = qs + ps\, G(s)^m\,.$$

Rešitev: Označimo z B *dogodek, da bo prva igra generirala nagradne igre. Po predpostavki je* $P(B) = p$. *Pogojno na* B *bo* m *nagradnih iger generiralo novih* $N_1, N_2, \ldots, N_m$ *iger, ki imajo enako porazdelitev kot* N *in so (pogojno) neodvisne. Sledi, da bo*

$$E(s^N | B) = E(s^{1+N_1+\cdots+N_m}) = s\, G(s)^m\,.$$

Ker je $E(s^N | B^c) = s$, *sledi*

$$G(s) = qs + ps\, G(s)^m\,.$$

c. (5) Privzemite, da sta $E(N)$ in $\mathrm{var}(N)$ končni, ter ju izračunajte.

Rešitev: Zvezo iz prejšnje točke odvajamo in pošljemo $s \uparrow 1$. *Dobimo zvezo*

$$E(N) = q + p + mp\, E(N)\,,$$

torej

$$E(N) = \frac{1}{1 - mp}\,.$$

Odvajamo še drugič in spet pošljemo $s \uparrow 1$. *Dobimo zvezo*

$$E(N(N-1)) = 2mp\, E(N) + pm(m-1)\, E(N)^2 + mp\, E(N(N-1))\,.$$

Z nekaj računanja sledi

$$\mathrm{var}(N) = \frac{m^2 pq}{(1 - mp)^3}\,.$$

6. (20) Predpostavljajte, da r kroglic razmestimo v n škatel, tako da škatle med seboj ločimo, kroglic pa ne, kot postulira *Bose–Einsteinova porazdelitev* iz statistične fizike. Z drugimi besedami, naključno izbiramo nabor n števil $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, za katerega je $k_i \geq 0$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ in $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r$; k_i predstavlja število kroglic v i-ti škatli. Vsak nabor izberemo z isto verjetnostjo

$$\frac{1}{\binom{n+r-1}{n-1}} .$$

a. (15) Naj bo N_k slučajno število škatel, v katerih je natanko k kroglic za $k = 0, 1, 2, \ldots, r$. Izračunajte

$$P(N_0 = n_0, \ldots, N_r = n_r)$$

za vse možne nabore $(n_0, \ldots, n_r)$. Kateri pa so možni nabori?

Rešitev: Možni nabori so tisti, pri katerih je:

- $n_0, n_1, \ldots, n_r \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$;
- $n_0 + n_1 + \cdots + n_r = n$;
- $n_1 + 2n_2 + \cdots + rn_r = r$.

Števila kroglic v posameznih škatlah si lahko predstavljamo kot njihove oznake, torej je ekvivalentno reči, da med škatle razporedimo $r + 1$ oznak, in sicer n_0 oznak 0, n_1 oznak 1 itd. Število razporeditev oznak s takimi zastopanostmi je

$$\frac{n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_r!} ,$$

torej je:

$$\begin{aligned} P(N_0 = n_0, \ldots, N_r = n_r) &= \frac{1}{\binom{n+r-1}{n-1}} \frac{n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_r!} \\ &= \frac{r!\,(n-1)!\,n!}{(n-r+1)!\, n_0!\, n_1! \cdots n_r!} . \end{aligned}$$

b. (5) Izračunajte porazdelitev slučajnega vektorja $(N_1, \ldots, N_r)$.

Rešitev: Opazimo, da je z vrednostjo slučajnega vektorja $(N_1, \ldots, N_r)$ določena tudi slučajna spremenljivka N_0, saj je $N_0 + N_1 + \cdots + N_r = N$. Tako iz prejšnje točke dobimo

$$P(N_1 = n_1, \ldots, N_r = n_r) = \frac{r!\,(n-1)!\,n!}{(n-r+1)!\,(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_r)!\, n_1!\, n_2! \cdots n_r!} ,$$

če je $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ in $n_1 + 2n_2 + \cdots + rn_r = r$; sicer je
$P\left(N_1 = n_1, \ldots, N_r = n_r\right) = 0$.