Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

2. kolokvij

21. 1. 2020

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.					
Skupaj					

1. (20) Vsako permutacijo lahko napišemo kot produkt ciklov. Primer:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (134)(25)(6)$$

Privzemite, da permutacijo n elementov izberemo naključno, tako da je verjetnost izbire posamezne permutacije enaka $1/n!$

Kot znano privzemite, da za $i \leq n$ velja

$$\sum_{l=i}^{n} \binom{l-1}{i-1} = \binom{n}{i}.$$

a. (15) Definirajte dogodke

$$A_i = \{\text{število } i \text{ je najmanjše v svojem ciklu}\}$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$. Izračunajte $P(A_i)$.

Rešitev: Recimo, da je i najmanjše število v ciklu dolžine $k \leq n-i+1$. Prešteti je treba vse take permutacije. Med števili $\{i+1, \ldots, n\}$ si moramo izbrati $k-1$ števil, ki bodo pripadala ciklu, ki se začne z i. To lahko naredimo na $\binom{n-i}{k-1}$ načinov. Izbranih $k-1$ števil lahko še poljubno permutiramo na $(k-1)!$ načinov. Ostalih $n-k$ števil lahko tudi še poljubno permutiramo. Permutacij, za katere se v i začne cikel dolžine k, je torej

$$\binom{n-i}{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (n-k)! = (n-i)! \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k-i+1)!}.$$

Seštejemo še po $k = 1, 2, \ldots, n-i+1$. Uvedimo novo spremenljivko $n-k = l$, Računamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-i+1} \frac{(n-k)!}{(n-k-i+1)!} &= \sum_{l=i-1}^{n-1} \frac{l!}{(l-i+1)!} \\ &= \sum_{l=i-1}^{n-1} (i-1)! \cdot \binom{l}{i-1} \\ &= (i-1)! \cdot \binom{n}{i} \qquad \textit{Namig!} \\ &= \frac{n!}{i \cdot (n-i)!}. \end{aligned}$$

Sledi, da je $P(A_i) = 1/i$.

Potrditi moramo še vsoto iz namiga. Predpostavimo, da želimo izbrati iz množice z elementi $\{1, 2, \ldots, n\}$ podmnožico z i elementi. Vse možne podmnožice razvrstimo v take, ki vsebujejo element l za $l = i, i+1, \ldots, n$, ostalih $i-1$ podmnožic pa izberemo izmed elementov $\{1, 2, \ldots, l-1\}$. Te poddružine podmnožic so disjunktne, v vsaki od njih pa je $\binom{l-1}{i-1}$ podmnožic. Sledi

$$\sum_{l=1}^{n} \binom{l-1}{i-1} = \binom{n}{i}.$$

b. (5) Naj bo X število vseh ciklov v naključno izbrani permutaciji. Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Definiramo

$$I_j = \begin{cases} 1 & \textit{če je } j \textit{ najmanjše število v svojem ciklu} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Ker je $X = I_1 + \cdots + I_n$, *je*

$$E(X) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

2. (20) Naj za celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y velja

$$P(X=k, Y=l) = \binom{n}{k}\binom{n}{l} \mathrm{B}(k+l+1, 2n-k-l+1)\,,$$

za $0 \le k, l \le n$, kjer je

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx\,.$$

a. (10) Navedite porazdelitev vsote $Z = X + Y$.

Namig: če sta U in V neodvisni in $U, V \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$, je $U + V \sim \mathrm{Bin}(2n, 1/2)$. Iz tega sklepajte, kaj je vsota $\sum_{\substack{k+l=m\\0\le k,l\le n}} \binom{n}{k}\binom{n}{l}$.

Rešitev: Naj bo $m = 0, 1, \ldots, 2n$ (te vrednosti lahko Z zavzame). Velja

$$P(Z=m) = \sum_{\substack{k+l=m\\0\le k,l\le n}} P(X=k, Y=l)\,.$$

Vstavimo in dobimo

$$P(Z=m) = \sum_{\substack{k+l=m\\0\le k,l\le n}} \binom{n}{k}\binom{n}{l} \mathrm{B}(m+1, 2n-m+1)\,.$$

Če sta U in V neodvisni in $U, V \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$, je $U + V \sim \mathrm{Bin}(2n, 1/2)$. Iz tega sledi

$$\sum_{\substack{k+l=m\\0\le k,l\le n}} \binom{n}{k}\binom{n}{l}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \binom{2n}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\,.$$

Sledi

$$P(Z=m) = \binom{2n}{m} \mathrm{B}(m+1, 2n-m+1) = \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}\,.$$

Drugače povedano, slučajna spremenljivka Z je porazdeljena diskretno enakomerno na množici $\{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Namig: izražava variance vsote z variancama in kovarianco.

Rešitev: Natančnejša formulacija namiga bi bila formula

$$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y)\,,$$

iz katere razberemo, da je dovolj vedeti variance slučajnih spremenljivk X, Y in Z. Po formuli za robno porazdelitev je

$$P(X=k) = \sum_{l=0}^{n} P(X=k, Y=l)\,.$$

Vstavimo in upoštevamo definicijo funkcije $\mathrm{B}(p,q)$. *Dobimo, da za vse* $k = 0,1,\ldots,n$ *velja*

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{l} \mathrm{B}(k+l+1, 2n-k-l+1) \\
&= \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l} dx \\
&= \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx \\
&= \binom{n}{k} \cdot \frac{k! \cdot (n-k)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\,.
\end{aligned}
$$

Slučajna spremenljivka X *je torej porazdeljena diskretno enakomerno na množici* $\{0,1,2,\ldots,n\}$. *Sledi*

$$
\mathrm{var}(X) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} - \frac{n^2(n+1)^2}{4(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{12}\,.
$$

Enako varianco ima tudi Y. *Ker je* Z *porazdeljena diskretno enakomerno na množici* $\{0,1,2,\ldots,n\}$, *je njena varianca enaka*

$$
\mathrm{var}(Z) = \frac{2n(2n+2)}{12}\,.
$$

Ker je

$$
\mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)\,,
$$

sklepamo

$$
\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\left(\frac{2n(2n+2)}{12} - \frac{2n(n+2)}{12}\right)\,.
$$

Poenostavimo v

$$
\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{n^2}{12}\,.
$$

3. (20) Naj bodo Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke. Definirajte $X = Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4$.

a. (10) Pokažite, da sta slučajni spremenljivki $Z_1 + Z_2$ in $Z_1 - Z_2$ neodvisni.

Rešitev: Iz transformacijske formule sledi, da je gostota vektorja $(W_1, W_2) = (Z_1 + Z_2, Z_1 - Z_2)$ *enaka*

$$f_{W_1,W_2}(w_1, w_2) = f_{Z_1}\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) f_{Z_2}\left(\frac{w_1 - w_2}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\,.$$

Vstavimo in sledi

$$f_{W_1,W_2}(w_1, w_2) = \frac{1}{4\pi}\, e^{-\frac{w_1^2}{4}} e^{-\frac{w_2^2}{4}}\,.$$

Gostota razpade na produkt dveh faktorjev, od koder sledi neodvisnost.

b. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke X.

Namig: uporabite izražavo

$$X = \frac{1}{4}\Big[(Z_1 + Z_2)^2 - (Z_1 - Z_2)^2 + (Z_3 + Z_4)^2 - (Z_3 - Z_4)^2\Big]\,.$$

Rešitev: Vsi členi v oklepaju pri izražavi iz namiga so med seboj neodvisni. Vemo tudi, da je

$$\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$$

standardizirano normalna, zato je

$$\frac{(Z_1 + Z_2)^2}{2} \sim \Gamma\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\,.$$

Iz tega sledi, da je

$$U = \frac{(Z_1 + Z_2)^2}{2} + \frac{(Z_3 + Z_4)^2}{2} \sim \exp(1/2)$$

in podobno

$$V = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{2} + \frac{(Z_3 - Z_4)^2}{2} \sim \exp(1/2)\,.$$

Zapišemo torej lahko $X = (U - V)/2$, *kjer sta* U, V *neodvisni in eksponentno porazdeljeni. Iz transformacijske formule sledi, da za* (U, V) *z gostoto* $f_{U,V}(u, v)$ *velja*

$$f_{U,(U-V)/2}(u, x) = f_{U,V}(u, u - 2x) \cdot 2$$

in posledično

$$f_X(x) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, u - 2x)\, du\,.$$

V našem primeru je $f_{U,V}(u, v) = f_U(u)\, f_V(v)$, *gostoti pa sta različni od nič za* $u, v > 0$. *Privzemimo najprej, da je* $x > 0$. *Za ta primer velja*

$$f_X(x) = 2\int_{2x}^{\infty} \frac{1}{4}\, e^{-u/2} e^{-(u-2x)/2}\, du\,.$$

Integracija nam da

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\, e^{-x}\,.$$

Ker je porazdelitev slučajne spremenljivke X simetrična, za splošni x velja

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}\,.$$

4. (20) *Grayeva koda* je zapis naravnega števila ali ničle, ki ga dobimo iz binarnega zapisa, tako da števko (bit) spremenimo, če je števka levo od nje (torej naslednja pomembnejša) enaka `1`; sicer števko ohranimo. Primer: število 13 ima binarni zapis `1101` in Grayevo kodo `1011`.

Grayeva koda posameznega števila ima enako mest kot binarni zapis in različni števili imata različni Grayevi kodi (preslikava, ki število preslika v njegovo Grayevo kodo, je torej injektivna). Odlikuje pa se po tem, da se, če število povečamo za 1, vselej spremeni le ena števka.

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in N naključno izbrano število iz množice $\{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$.

a. (5) Če binarnemu zapisu ali Grayevi kodi števila N dodamo ustrezno število vodilnih ničel, dobimo slučajno zaporedje n ničel in enic. Utemeljite, da za tako dobljeno slučajno zaporedje, ki pripada binarnemu zapisu ali Grayevi kodi števila N, velja, da se na posameznem mestu ničla ali enica pojavi z verjetnostjo $1/2$ in da so mesta med seboj neodvisna.

   Rešitev: Preslikava iz množice $\{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ v $\{0, 1\}^n$, ki število preslika v binarni zapis ali Grayevo kodo (z ustreznimi vodilnimi ničlami), je injektivna. Ker slika med množicama iste končne moči, je tudi bijektivna. Torej so vse možne n-terice ničel in enic enako verjetne. To pa se zgodi tudi, če vzamemo nabor n neodvisnih števil, porazdeljenih enakomerno na $\{0, 1\}$. Ker so robne porazdelitve in neodvisnost določene s skupno porazdelitvijo, sledi, da so tudi števke iz binarnega zapisa ali Grayeve kode neodvisne in porazdeljene enakomerno na $\{0, 1\}$.

b. (15) Naj bo X število enic v binarnem zapisu, Y pa število enic v Grayevi kodi števila N. Izračunajte $\operatorname{corr}(X, Y)$.

   Rešitev: Za $i = 0, 1, \ldots, n-1$ naj bo X_i števka na i-tem mestu v binarnem zapisu, Y_i pa naj bo števka v Grayevi kodi števila N; pri tem mesta gledamo z desne proti levi, tako da je $N = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i X_i$. Velja $X = \sum_{i=0}^{n-1} X_i$ in $Y = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i$. Iz prejšnje točke sledi, da sta slučajni spremenljivki X in Y porazdeljeni binomsko $\mathrm{Bin}(n, 1/2)$, torej je $\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(Y) = n/4$.

   Velja $\operatorname{cov}(X, Y) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{cov}(X_i, Y_j)$. Za kovariance ločimo naslednje možnosti:

   - *Če je $i = j < n - 1$, je $X_i Y_j = 1$ natanko tedaj, ko je števka na i-tem mestu v binarnem zapisu enaka `1`, števka na $(i+1)$-tem mestu pa `0`. Torej je $E(X_i Y_j) = 1/4$. Ker je $E(X_i) = E(Y_j) = 1/2$, je $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$.*
   - *Če je $i = j = n-1$, je $X_i Y_j = 1$ natanko tedaj, ko je števka na i-tem mestu v binarnem zapisu enaka `1`. Torej je $E(X_i Y_j) = 1/2$ in zato $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 1/4$.*
   - *Če je $i = j + 1$, je $X_i Y_j = 1$ natanko tedaj, ko je števka na i-tem mestu v binarnem zapisu enaka `1`, števka na $(i+1)$-tem mestu pa `0`. Torej je spet $E(X_i Y_j) = 1/4$ in zato $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$.*
   - *V vseh ostalih primerih sta X_i in Y_j neodvisni, ker je X_i natančno določena s števko na i-tem mestu, Y_j pa s števkama na j-tem in $(j+1)$-tem mestu, množici $\{i\}$ in $\{j, j+1\}$ pa sta disjunktni. Spet sledi $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$.*

Le za $i = j = n-1$ *je torej* $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 1/4$, *sicer pa je* $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$. *Sledi* $\operatorname{cov}(X, Y) = 1/4$ *in končno* $\operatorname{corr}(X, Y) = 1/n$.

5. (20) Naj bo N nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka, katere porazdelitev je podana z rekurzivno formulo

$$P(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) P(N = n-1)\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

kjer je $a \in [0, 1)$ in $b \geq 0$.

a. (10) Označimo z G_N rodovno funkcijo slučajne spremenljivke N. Izračunajte razmerje $\dfrac{G'_N(s)}{G_N(s)}$.

Namig: izračunajte $(1 - as)G'_N(s)$, pri čemer pri določenih členih uporabite rekurzivno formulo, pri določenih pa ne.

Rešitev: Iz

$$G_N(s) = P(N = 0) + P(N = 1)\,s + P(N = 2)\,s^2 + \cdots$$

izračunamo

$$G'_N(s) = P(N = 1) + 2\,P(N = 2)\,s + 3\,P(N = 3)\,s^2 + \cdots$$

in nadalje

$$\begin{aligned}
&(1 - as)G'_N(s) \\
&\quad = P(N = 1) + 2\,P(N = 2)\,s + 3\,P(N = 3)\,s^2 + \cdots \\
&\qquad\quad - a\,P(N = 1)\,s - 2a\,P(N = 2)\,s^2 - 3a\,P(N = 3)\,s^3 + \cdots \\
&\quad = (a + b)\,P(N = 0) + (2a + b)\,P(N = 1)\,s + (3a + b)\,P(N = 2)\,s^2 + \cdots \\
&\qquad\quad - a\,P(N = 1)\,s - 2a\,P(N = 2)\,s^2 - 3a\,P(N = 3)\,s^3 + \cdots \\
&\quad = (a + b)\big(P(N = 0) + P(N = 1)\,s + P(N = 2)\,s^2 + \cdots\big) \\
&\quad = (a + b)\,G_N(s)\,.
\end{aligned}$$

Torej je $\dfrac{G'_N(s)}{G_N(s)} = \dfrac{a + b}{1 - as}$.

b. (10) Naj bodo $I_1, I_2, \ldots$ med sabo neodvisne, neodvisne od N in enako porazdeljene z $I_1 \sim \text{Bernoulli}(p)$. Naj bo $X = I_1 + I_2 + \cdots + I_N$. Dokažite, da tudi verjetnosti za X zadoščajo zvezi oblike

$$P(X = n) = \left(\tilde{a} + \frac{\tilde{b}}{n}\right) P(X = n-1)\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

ter izračunajte koeficienta $\tilde{a}$ in $\tilde{b}$. Kot znano lahko upoštevate, da je diferencialna enačba, ki ji zadošča rodovna funkcija, skupaj z začetnim pogojem, ki mu zadoščajo vse rodovne funkcije, v primerni okolici enolično rešljiva.

Rešitev: Vemo, da je $G_X(s) = G_N(G_{I_1}(s))$. Pri tem je $G_{I_1}(s) = q + ps$, kjer je $q = 1 - p$. Sledi, da je

$$G_X(s) = G_N(q + ps)\,.$$

Z odvajanjem sledi

$$G_X'(s) = p\, G_N'(q + ps)\,,$$

torej

$$\frac{G_X'(s)}{G_X(s)} = p\, \frac{G_N'(q + ps)}{G_N(q + ps)} = p\, \frac{a + b}{1 - aq - aps} = \frac{\frac{ap}{1-aq} + \frac{bp}{1-aq}}{1 - \frac{aps}{1-aq}}\,.$$

Rodovna funkcija torej zadošča isti diferencialni enačbi, kot bi jo po prejšnji točki dobili, če bi namesto a in b vstavili $\tilde{a} = \frac{ap}{1-aq}$ in $\tilde{b} = \frac{bp}{1-bq}$. Iz enoličnosti rešitve diferencialne enačbe in dejstva, da rodovna funkcija, definirana na neizrojenem intervalu, enolično določa porazdelitev, dobimo, da verjetnosti za X res zadoščajo rekurzivni zvezi za $\tilde{a}$ in $\tilde{b}$.

6. (20) Naj bodo pari $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ celoštevilskih slučajnih spremenljivk neodvisni z

$$P(X_1 = i, Y_1 = j) = \binom{i}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$$

za $i \geq 1$ in $0 \leq j \leq i$. Naj bo

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{in} \quad T_n = Y_1 + \cdots + Y_n\,.$$

Kot znano privzemite, da za $n \leq k$ velja

$$\sum_{r=n}^{k} \binom{r-1}{n-1} = \binom{k}{n}$$

in

$$\sum_{r=1}^{k-n+1} r \binom{k-r}{n-1} = \binom{k+1}{n+1}\,.$$

a. (5) Za $n \leq k$ izračunajte

$$P(S_n \leq k < S_{n+1})\,.$$

Rešitev: Računamo

$$P(X_1 = i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \cdot \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i}\,.$$

Sledi, da je $X_1 \sim \mathrm{Geom}(\frac{1}{2})$. *Vemo, da je* $S_n \sim \mathrm{NegBin}(n, \frac{1}{2})$. *Od tod naprej gre vsaj na dva načina.*

Prvi način. *Zapišimo*

$$\{S_n \leq k < S_{n+1}\} = \bigcup_{r=n}^{k} \{S_n = r, X_{n+1} > k - r\}\,.$$

Dogodki v uniji so disjunktni, zato je

$$\begin{aligned} P(S_n \leq k < S_{n+1}) &= \sum_{r=n}^{k} P(S_n = r, X_{n+1} > k - r) \\ &= \sum_{r=n}^{k} P(S_n = r)\, P(X_{n+1} > k - r) \\ &= \sum_{r=n}^{k} \binom{r-1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ &= \binom{k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\,. \end{aligned}$$

Drugi način. *Zamislimo si zaporedje neodvisnih metov poštenega kovanca. Če je* X_1' *število metov do vključno prvega grba,* X_i' *pa število metov od nevključno* $(i-1)$*-tega do vključno* i*-tega grba, so* $X_1', X_2', \ldots$ *prav tako neodvisne in porazdeljene geometrijsko* $\mathrm{Geom}(\frac{1}{2})$. *Zato smemo privzeti, da je kar* $X_i' = X_i$. *Tedaj je* S_n *število metov do vključno* n*-tega grba,* $\{S_n \leq k < S_{n+1}\}$ *pa je dogodek, da je v prvih* k *metih padlo natanko* n *grbov. Enakost iz prvega načina sledi.*

b. (5) Za $n \leq k$ in $j \leq k-n+1$ izračunajte

$$E\big(Y_1 \cdot \mathbf{1}(X_1 = j, S_n \leq k < S_{n+1})\big)\,.$$

Rešitev: Označimo $\tilde{S}_n = S_n - X_1$. *Velja*

$$\begin{aligned}
&E\big(Y_1 \cdot \mathbf{1}(X_1 = j, S_n \leq k < S_{n+1})\big)\\
&\qquad = E\big(Y_1 \cdot \mathbf{1}(X_1 = j, \tilde{S}_n \leq k-j < \tilde{S}_{n+1})\big)\\
&\qquad = E\big(Y_1 \cdot \mathbf{1}(X_1 = j)\big)\, P(\tilde{S}_n \leq k-j < \tilde{S}_{n+1})\\
&\qquad = E(Y_1 | X_1 = j)\, P(X_1 = j)\, P(\tilde{S}_n \leq k-j < \tilde{S}_{n+1})\,.
\end{aligned}$$

Velja

$$P(Y_1 = i | X_1 = j) = \frac{P(X_1 = i, Y_1 = j)}{P(X_1 = j)} = \binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^i,$$

torej je slučajna spremenljivka Y_1 *pogojno na* $X_1 = j$ *porazdeljena binomsko* $\mathrm{Bin}(j, 1/2)$, *zato je* $E(Y_1 | X_1 = j) = j/2$. *Vstavimo v prej dobljeno enakost in dobimo*

$$E\big(Y_1 \cdot \mathbf{1}(X_1 = j, S_n \leq k < S_{n+1})\big) = \frac{j}{2} \cdot \binom{k-j}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

c. (5) Za $n \leq k$ izračunajte

$$E\left(Y_1 | S_n \leq k < S_{n+1}\right)\,.$$

Rešitev: Velja

$$\begin{aligned}
E\big(Y_1 \cdot \mathbf{1}(S_n \leq k < S_{n+1})\big) &= \sum_{j=1}^{k-n+1} E\big(Y_1 \cdot \mathbf{1}(X_1 = j, S_n \leq k < S_{n+1})\big)\\
&= \sum_{j=1}^{k-n+1} \frac{j}{2} \cdot \binom{k-j}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \binom{k+1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Sledi

$$E(Y_1 | S_n \leq k < S_{n+1}) = \frac{1+k}{2+2n}\,.$$

d. (5) Za $n \leq k$ izračunajte

$$E\left(T_n | S_n \leq k < S_{n+1}\right)\,.$$

Rešitev: Zaradi linearnosti pogojne pričakovane vrednosti in simetrije je

$$E\left(T_n | S_n \leq k < S_{n+1}\right) = \frac{n(1+k)}{2+2n}\,.$$