Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

1. kolokvij

28. november 2019

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V posodi so sprva tri bele in ena rdeča kroglica. Ponavljamo naslednji postopek: iz posode najprej na slepo izvlečemo kroglico in če je rdeča, končamo. Če pa je bela, podvojimo število belih kroglic, ki ostanejo v posodi, nato pa še vrnemo izvlečeno belo kroglico.

a. (15) Za $k = 1, 2, 3, \ldots$ izračunajte verjetnost, da smo vlekli natanko k-krat.

Rešitev: Z indukcijo vidimo, da je pred j-tim vlečenjem v posodi $2^j + 2$ kroglic, od katerih je ena rdeča, preostale pa so bele. Verjetnost, da smo vlekli natanko k-krat, je torej

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \cdots \cdot \frac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}+2} \cdot \frac{1}{2^k+2} = \frac{1}{2^{k+1}} \,.$$

b. (5) Kolikšna je verjetnost, da se postopek nikoli ne konča?

Rešitev: Prvi način. *Iskana verjetnost je enaka*

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(\textit{vlekli smo natanko } k\textit{-krat}) = \frac{1}{2} \,.$$

Drugi način. *Postopek se nikoli ne konča, če nikoli ne izvlečemo rdeče. Ta dogodek pa je presek dogodkov*

$$B_k = \{\textit{niti po } k\textit{-tem vlečenju še ne izvlečemo rdeče}\} \,,$$

ki tvorijo padajoče zaporedje. Velja:

$$P(B_k) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2^{k-2}+1}{2^{k-2}+2} \cdot \frac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}+2} \cdot \frac{2^k+1}{2^k+2} = \frac{2^k+1}{2^{k+1}} \,,$$

torej je iskana verjetnost enaka $\lim_{n\to\infty} P(B_k) = \frac{1}{2}$.

2. (20) V standardnem kupu 52 kart je 13 različnih vrst kart, od vsake po 4. V igri *Baccarat* delilec kart vzame 8 standardnih kupov kart in jih dobro premeša. Privzamemo, da so vse permutacije 416 kart enako verjetne. Delilec z vrha kupa premešanih 416 kart vzame 52 kart.

a. (10) Kolikšna je verjetnost dogodka, da so med 52 kartami, ki jih delilec vzame z vrha, zastopane vse vrste kart? Binomskih simbolov in vsot vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Označimo z A dogodek, katerega verjetnost nas zanima. Označimo

$$A_i = \{\textit{manjka vrsta } i \textit{ kart}\}$$

za $i = 1, 2, \ldots, 13$, kjer smo vrste kart oštevilčili. Velja $A^c = \cup_{i=1}^{13} A_i$. Prvih 52 kart je zaradi dobrega mešanja naključen vzorec izmed vseh 416 kart. Računamo

$$P(A_1) = \frac{\binom{416-32}{52}}{\binom{416}{52}}, \qquad P(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{416-64}{52}}{\binom{416}{52}}$$

in splošno

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{\binom{416-32k}{52}}{\binom{416}{52}}$$

za $k = 1, 2, \ldots, 11$; za $k = 12, 13$ je dogodek $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$ nemogoč. Po formuli za vključitve in izključitve in zaradi simetrije velja

$$P(A^c) = \sum_{k=1}^{11} (-1)^{k-1} \binom{13}{k} \cdot \frac{\binom{416-32k}{52}}{\binom{416}{52}},$$

torej je

$$P(A) = \sum_{k=0}^{11} (-1)^{k} \binom{13}{k} \cdot \frac{\binom{416-32k}{52}}{\binom{416}{52}},$$

Numerični izračun pokaže

$$P(A) \doteq 0{,}8554971\,.$$

b. (10) Ena izmed vrst kart je tudi as. Naj bo B dogodek, da je med vrhnjimi 52 kartami vsaj en as, in A dogodek, da so med 52 kartami, ki jih vzame delilec, zastopane vse vrste kart. Izračunajte $P(A|B)$. Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Opazimo, da je $A \subseteq B$, torej je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{1 - P(B^c)} = \frac{P(A)}{1 - \frac{\binom{416-32}{52}}{\binom{416}{52}}} = \frac{P(A)}{1 - \frac{\binom{384}{52}}{\binom{416}{52}}}\,.$$

Numerični izračun pokaže

$$P(A|B) \doteq 0{,}865574\,.$$

3. (20) Pet ljudi se odloča, kdo bo plačal za pijačo. V ta namen vsak od njih vrže pošten kovanec. Če ima nekdo grb, vsi ostali pa številko, mora tisti z grbom plačati pijačo. Če ima nekdo številko, vsi ostali pa grb, je tisti s številko tisti, ki plača za pijačo. V vseh drugih primerih metanje kovancev nadaljujejo. Posamezni meti so med seboj vedno neodvisni, pri poštenem kovancu pa je verjetnost za grb enaka $1/2$.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da po n "rundah" metanja kovancev še ni znan tisti, ki bo moral plačati za pijačo?

Rešitev: V vsaki rundi metanja kovancev je možnost za "uspeh" enaka, runde pa so med sabo neodvisne. Runda je uspešna, če v petih metih kovanca pade natanko en ali natanko štirje grbi. Ker ima število grbov porazdelitev $\mathrm{Bin}(5, 1/2)$*, je verjetnost, da je posamezna runda uspašna, enaka*

$$\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}\,.$$

Dogodek, katerega verjetnost iščemo, je dogodek, da je bilo prvih n rund neuspešnih, torej je njegova verjetnost enaka $(11/16)^n$.

b. (10) Ena od oseb je Janez. Kolikšna je verjetnost, da bo v n-ti rundi za plačnika določen Janez?

Rešitev: Prvi način. *Dogodek, da je plačnik določen v točno n-ti rundi, je natančno dogodek, da je bilo prvih $n-1$ rund neuspešnih, v n-ti rundi pa je bodisi Janez vrgel številko, vsi ostali pa grb, bodisi je Janez vrgel grb, vsi ostali pa številko. Iskana verjetnost je enaka:*

$$\left(\frac{11}{16}\right)^{n-1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}\left(\frac{11}{16}\right)^{n-1}\,.$$

Drugi način. *Označimo z X število rund do uspeha. Ta slučajna spremenljivka je porazdeljena geometrijsko* $\mathrm{Geom}(5/16)$*. Verjetnost, da bo plačnik določen v točno n-ti rundi, je enaka*

$$P(X = n) = \frac{5}{16} \cdot \left(\frac{11}{16}\right)^{n-1}\,.$$

Zaradi simetrije si vsi to verjetnost "delijo" v enakih delih.

4. (20) Naj bo $U \sim U(0,1)$ in $V \sim \mathrm{Beta}(1/2, 1/2)$.

a. (10) Definirajte
$$X = 2\min(U, 1-U)\,.$$
Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Vrednosti slučajne spremenljivke X bodo na intervalu $(0,1)$. Za x iz tega intervala izračunamo

$$\begin{aligned}
P(X \le x) &= P\big(2\min(U, 1-U) \le x\big) \\
&= P\big(\{U \le x/2\} \cup \{U \ge 1 - x/2\}\big) \\
&= P\left(U \le x/2\right) + P\left(U \ge 1 - x/2\right) \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \\
&= x\,.
\end{aligned}$$

Sledi $X \sim U(0,1)$.

b. (10) Definirajte
$$Y = \frac{1-V}{V}\,.$$
Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke Y.

Rešitev: Za $y > 0$ dobimo

$$\begin{aligned}
P\left(Y \le y\right) &= P\left(\frac{1-V}{V} \le y\right) \\
&= P\left(1 - V \le yV\right) \\
&= P\left(V \ge \frac{1}{1+y}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{1+y}}^{1} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}}\,.
\end{aligned}$$

Odvajamo po y in sledi
$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}\,.$$

Za $y \le 0$ lahko postavimo $f_Y(y) = 0$.

5. (20) V posodi je $B \geq 2$ belih in R rdečih kroglic. Kroglice iz posode izbiramo zapovrstjo naključno brez vračanja. Naj bo X število izbiranj do vključno prve bele kroglice, Y pa število izbiranj do vključno druge bele kroglice.

a. (10) Izračunajte *skupno* porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Rešitev: Možni pari vrednosti za slučajni spremenljivki X in Y so vsi celoštevilski pari (k, l), za katere je $1 \leq k < l \leq R+2$. Če naj se dogodek $\{X = k, Y = l\}$ zgodi, moramo najprej dobiti $k-1$ rdečih kroglic, belo, $l-k-1$ rdečih in spet belo. Označimo $N = B + R$. Verjetnost danega dogodka lahko izračunamo kot

$$
\begin{aligned}
P(X = k, Y = l) &= \frac{R}{N} \cdot \frac{R-1}{N-1} \cdots \frac{R-k+2}{N-k+2} \cdot \frac{B}{N-k+1} \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{R-k+1}{N-k} \cdots \frac{R-l+3}{N-l+2} \cdot \frac{B-1}{N-l+1} \\
&= \frac{B(B-1)\, R!\, (N-l)!}{(R-l+2)!\, N!}
\end{aligned}
$$

ali kot

$$
P(X = k, Y = l) = \frac{\binom{N-l}{B-2}}{\binom{N}{B}} = \frac{B(B-1)\, R!\, (N-l)!}{(R-l+2)!\, N!} \, .
$$

b. (10) Utemeljite, da za vse $l = 2, 3, \ldots, R+2$ in $k = 1, 2, \ldots, l-1$ velja

$$
P(X = k, Y = l) = \frac{1}{l-1}\, P(Y = l) \, .
$$

Rešitev: Uporabimo formulo za robno porazdelitev

$$
P(Y = l) = \sum_{k=1}^{l-1} P(X = k, Y = l)
$$

in opazimo, da so vse verjetnosti v vsoti enake (neodvisne od k). Trditev sledi.

6. (20) Arkovi in Benedikovi v istem tednu (od ponedeljka do nedelje) odpotujejo na isti otok, kjer je 10 turističnih destinacij. Vsaka družina vsak dan izbere eno turistično destinacijo, ki jo obišče, pri čemer nikoli ne gredo dvakrat na isto destinacijo. Vse možne kombinacije izbir Arkovih in Benedikovih so enako verjetne.

a. (5) Kolikšna je verjetnost, da se družini v ponedeljek, torek in sredo srečata na izbranih destinacijah (ostale dneve pa se lahko srečata ali ne)?

   Rešitev: Lahko fiksiramo destinacije, ki jih izberejo Arkovi. Benedikovi imajo za ponedeljek, torek in sredo $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ *možnosti in samo ena je ugodna. Iskana verjetnost je torej* $1/720$.

b. (15) Kolikšna pa je verjetnost, da se družini na izbranih destinacijah srečata *natanko* trikrat (ne glede na to, katere dni)? Dovolj je, da rezultat zapišete kot izraz, dobljen iz naravnih števil z uporabo končno mnogo elementarnih računskih operacij (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje).

   Rešitev: Izračunajmo najprej verjetnost, da se družini srečata natanko v ponedeljek, torek in sredo. Ustrezni dogodek lahko zapišemo kot:

$$B_{123} := (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \setminus (A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7)\,,$$

   kjer je A_k *dogodek, da se družini srečata* k*-ti dan. Iz načela vključitev in izključitev in simetrije sledi*

$$\begin{aligned}
P(B_{123}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P\left(\bigcup_{k=4}^{7}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_k)\right) \\
&= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - 4\,P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&\qquad + 6\,P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\
&\qquad - 4\,P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) \\
&\qquad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7) \\
&= \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8} - \frac{4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} - \frac{4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \\
&\qquad + \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \\
&= \frac{31}{40320}\,.
\end{aligned}$$

   Verjetnost iskanega dogodka pa je:

$$\binom{7}{3} P(B_{123}) = 35\,P(B_{123}) = \frac{31}{1152} \doteq 0{,}0269\,.$$