IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

1. kolokvij

29. november 2018

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.				•	
4.				•	
5.			•	•	
6.				•	
Skupaj					

1. (20) Junak *Polemistes*[1] se je zameril bogu *Pozejdonu*[2]. Od takrat naprej Pozejdon vsak dan iz morja nadenj pošlje strašnega zmaja. Vsakič bodisi Polemistes ubije zmaja bodisi zmaj ubije Polemistesa. Toda Polemistes je vsak dan bolj izurjen: verjetnost, da ga zmaj ubije v n-ti bitki (ki jih štejemo od 1 naprej), je $\frac{1}{(n+1)^2}$. Izidi posamičnih bitk so med sabo neodvisni.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da Polemistes dolgoročno gledano ostane živ (morebitne druge vzroke smrti zanemarimo)?

   Rešitev: Verjetnost, da Polemistes preživi prvih n bitk, je:

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&\quad = \frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot\cdots\cdot n(n+2)}{\big[(n+1)!\big]^2} \\
&\quad = \frac{n!\,(n+2)!}{2\big[(n+1)!\big]^2} \\
&\quad = \frac{n+2}{2(n+1)}\,.
\end{aligned}
$$

   Iskana verjetnost je limita, ko gre n proti neskončno, ta pa je enaka $1/2$.

b. (10) Pozejdon prvi dan pošlje rdečega zmaja, drugi dan zelenega, tretji dan spet rdečega itd. Recimo, da je Polemistes podlegel kateremu od zmajev. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bil to rdeči zmaj?

   Namiga: $\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$; $\quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

   Rešitev: Verjetnost, da Polemistesa ubije rdeči zmaj, je

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+2}{4k+2}\,\frac{1}{(2k+2)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2(2k+1)(2k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right) \\
&= \frac{\log 2}{2}\,.
\end{aligned}
$$

   Iskana pogojna verjetnost pa je enaka $\log 2$.

[1] Beseda v stari grščini pomeni vojščak, bojevnik, iz te osnove pa izvira tudi sodobna beseda polemika.

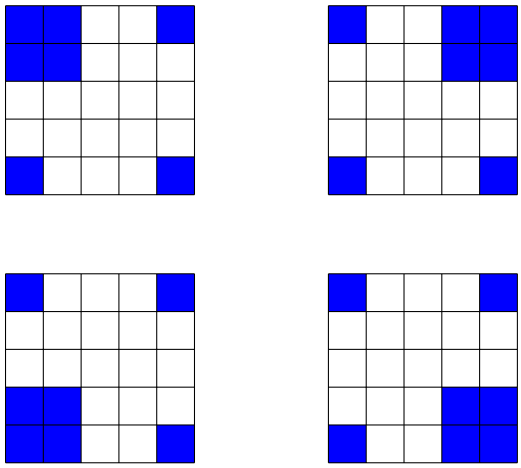
[2] starogrški bog morja

2. (20) V igri *Bingo75* igralec na srečo dobi kartico, na kateri je 5×5 matrika različnih števil med 1 in 75. Primer take kartice je na Sliki 1a.

18	31	29	8	52
53	48	12	15	62
9	11	32	27	4
5	22	17	3	7
2	6	19	28	13

Slika 1a Primer kartice pri igri *Bingo75*.

V igri se potem izbere določene vzorce, ki prinesejo dobitek. Eden od možnih naborov vzorcev so *Bloki s pikami*, ki so na Sliki 1b.



Slika 1b Nabor vzorcev *Bloki s pikami*.

Igra poteka tako, da se po vrsti naključno in brez vračanja izbira števila iz množice $\{1, 2, \ldots, 75\}$, dokler niso prvič izbrana vsa števila s polj, ki tvorijo enega izmed štirih vzorcev. Naj bo X število izbiranj, dokler se igra ne ustavi, vključno z zadnjim, ko je prvič pokrit vsaj eden izmed vzorcev.

Primer: če je zaporedje izbranih števil 18,2,3,13,27,53,31,11,48,9,52, je $X = 11$.

a. (10) Za $k = 7, 8, \ldots, 75$ izračunajte verjetnosti $P(X \le k)$. Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Fiksirajmo možno vrednost k in oštevilčimo možne variante vzorca z $i = 1, 2, 3, 4$. Naj bo

$$A_{k,i} = \{\textit{po } k \textit{ izbranih številih je pokrit vzorec } i\}\,.$$

Velja

$$\{X \le k\} = \bigcup_{i=1}^{4} A_{k,i}$$

in posledično po formuli za vključitve in izključitve in z upoštevanjem simetrije dobimo

$$P(X \le k) = 4P(A_{k,1}) - 6P(A_{k,1} \cap A_{k,2}) + 4P(A_{k,1} \cap A_{k,2} \cap A_{k,3}) \\ - P(A_{k,1} \cap A_{k,2} \cap A_{k,3} \cap A_{k,4})\,.$$

Ker izbiramo števila naključno, je prvih k izbranih števil naključni vzorec velikosti k iz množice $\{1, 2, \ldots, 75\}$. Sledi

$$P(A_{k,1}) = \frac{\binom{68}{k-7}}{\binom{75}{k}} = \frac{\binom{k}{7}}{\binom{75}{7}},$$

$$P(A_{k,1} \cap A_{k,2}) = \frac{\binom{65}{k-10}}{\binom{75}{k}} = \frac{\binom{k}{10}}{\binom{75}{10}},$$

$$P(A_{k,1} \cap A_{k,2} \cap A_{k,3}) = \frac{\binom{62}{k-13}}{\binom{75}{k}} = \frac{\binom{k}{13}}{\binom{75}{13}},$$

$$P(A_{k,1} \cap A_{k,2} \cap A_{k,3} \cap A_{k,4}) = \frac{\binom{59}{k-16}}{\binom{75}{k}} = \frac{\binom{k}{16}}{\binom{75}{16}}.$$

Če je $b < 0$ ali $b > a$, razumemo, da je $\binom{a}{b} = 0$.

b. (10) Naj bo B dogodek, da se igra zaključi z izbiro števila 18 v levem zgornjem kotu kartice. Izračunajte $P\big(B \cap \{X = k\}\big)$.

Rešitev: Prevedeno v običajni jezik je presek $B \cap \{X = k\}$ dogodek, da v prvih $k - 1$ korakih pokrijemo vsaj enega izmed štirih možnih vzorcev razen manjkajočega levega zgornjega polja, na k-tem koraku pa dodamo manjkajoče polje. Naj bo C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ dogodek, da po $k - 1$ korakih pokrijemo vzorec i razen polja v levem zgornjem kotu, na k tem koraku pa dodamo manjkajoče polje. Računamo torej

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} \big(C_i \cap \{X = k\}\big)\right).$$

Spet uporabimo formulo za vključitve in izključitve, kjer potrebujemo verjetnosti naslednjih presekov:

$$P\big(C_i \cap \{X = k\}\big) = \frac{\binom{68}{k-7}}{\binom{75}{k-1}} \cdot \frac{1}{76 - k} = \frac{\binom{k-1}{6}}{\binom{75}{6}} \cdot \frac{1}{69},$$

$$P\big(C_i \cap C_j \cap \{X = k\}\big) = \frac{\binom{65}{k-10}}{\binom{75}{k-1}} \cdot \frac{1}{76 - k} = \frac{\binom{k-1}{9}}{\binom{75}{9}} \cdot \frac{1}{66},$$

$$P\big(C_i \cap C_j \cap C_l \cap \{X = k\}\big) = \frac{\binom{62}{k-13}}{\binom{75}{k-1}} \cdot \frac{1}{76 - k} = \frac{\binom{k-1}{12}}{\binom{75}{12}} \cdot \frac{1}{63},$$

$$P\big(C_i \cap C_j \cap C_l \cap C_m \cap \{X = k\}\big) = \frac{\binom{59}{k-16}}{\binom{75}{k-1}} \cdot \frac{1}{76 - k} = \frac{\binom{k-1}{15}}{\binom{75}{15}} \cdot \frac{1}{60}.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
P\big(B \cap \{X = k\}\big) &= \frac{1}{76 - k}\left[4\,\frac{\binom{68}{k-7}}{\binom{75}{k-1}} - 6\,\frac{\binom{65}{k-10}}{\binom{75}{k-1}} + 4\,\frac{\binom{62}{k-13}}{\binom{75}{k-1}} - \frac{\binom{59}{k-16}}{\binom{75}{k-1}}\right] \\
&= 4\,\frac{\binom{k-1}{6}}{69 \cdot \binom{75}{6}} - 6\,\frac{\binom{k-1}{9}}{66 \cdot \binom{75}{9}} + 4\,\frac{\binom{k-1}{12}}{63 \cdot \binom{75}{12}} - \frac{\binom{k-1}{15}}{60 \cdot \binom{75}{15}}.
\end{aligned}$$

3. (20) V posodi je na začetku ena bela in dve rdeči kroglici. Iz posode začnemo vleči kroglice. Vsakič, ko izvlečemo belo, jo vrnemo v posodo in dodamo še eno belo kroglico. Vsakič, ko izvlečemo rdečo kroglico, pa jo obdržimo in v posodo dodamo še dve beli kroglici.

a. (10) Za $1 \leq m < n$ izračunajte verjetnost, da rdečo kroglico prvič izvlečemo pri m-tem, drugič pa pri n-tem vlečenju. Rezultat izrazite v sklenjeni obliki.

Rešitev: Iskana verjetnost je enaka

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{2}{m+2} \cdot \frac{m+2}{m+3} \cdots \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{4}{m(m+1)(n+1)(n+2)}\,.$$

b. (5) Označimo z X število izvlečenih kroglic do vključno zadnje rdeče. Za vse $n = 2, 3, 4, \ldots$ izračunajte $P(X = n)$.

Namig: $\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$.

Rešitev:

$$P(X = n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{4}{m(m+1)(n+1)(n+2)} = \frac{4(n-1)}{n(n+1)(n+2)}\,.$$

c. (5) Dokažite, da skoraj gotovo nekoč izvlečemo obe rdeči kroglici.

Rešitev: Prvi način. *To sledi iz dejstva, da je*

$$\begin{aligned}
P(X < \infty) &= \sum_{n=2}^{\infty} P(X = n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4(n-1)}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} + \frac{8}{n+1} - \frac{6}{n+2} \right) \\
&= 6 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 6 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Drugi način. *Oglejmo si dogodek* $\{X > n\}$. *Le-ta je disjunktna unija dogodkov* A_n *in* $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots, A_{n,n}$, *kjer je:*

$$\begin{aligned}
A_n &= \{\textit{med prvimi } n \textit{ izvlečenimi kroglicami ni rdeče}\}\,, \\
A_{n,m} &= \{\textit{med prvimi } n \textit{ izvlečenimi kroglicami je edina rdeča na } m\textit{-tem mestu}\}\,.
\end{aligned}$$

Velja

$$P(A_n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{m}{m+2} = \frac{2}{(m+1)(m+2)}\,,$$

$$P(A_{n,m}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{2}{m+2} \cdot \frac{m+2}{m+3} \cdots \frac{n+1}{n+2} = \frac{4}{m(m+1)(n+2)}\,.$$

Torej je

$$\begin{aligned} P(X > n) &= P(A_n) + \sum_{m=1}^{n} P(A_{n,m}) = \frac{1}{n+2}\left[\frac{2}{n+1} + \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)\right] \\ &= \frac{2+4n}{(n+1)(n+2)}\,, \end{aligned}$$

kar gre proti nič, ko gre n *proti neskončno. Želeno dejstvo sledi.*

4. (20) Matematika Adam in Branka neodvisno drug od drugega izbereta vsak svojo podmnožico množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Adam za vsako število vrže pošten kovanec in ga uvrsti v svojo množico, če pade grb, sicer pa ne. Branka pa izbere eno izmed podmnožic moči b, vsako z enako verjetnostjo. Pri tem je $b \in \{0, 1, \ldots, n\}$ vnaprej predpisano število. Privzamemo, da so vsi meti Adamovega kovanca neodvisni tako med seboj kot tudi od Brankine množice. Označimo z A Adamovo, z B pa Brankino množico.

a. (10) Zapišite porazdelitev moči simetrične razlike $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Pripadajoče verjetnosti zapišite s sklenjeno formulo, pri čemer so dovoljene osnovne računske operacije in binomski simboli.

Rešitev: Fiksirajmo množico B. Element, ki je v B, bo v simetrični razliki, če Adam pri njem vrže cifro, element, ki ni v B, pa bo v simetrični razliki, če Adam pri njem vrže grb. V vsakem primeru pa bo posamezno število v množici A z verjetnostjo $1/2$ in števila so pri tem še vedno neodvisna. Tako dobimo, da je porazdelitev binomska $\mathrm{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. *Če torej z X označimo moč dane simetrične razlike, velja*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} 2^{-n}\,;\ k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

b. (5) Modificirajmo nalogo tako, da Adam pri številu n ne vrže kovanca in ga ne vključi v množico. Kakšna je zdaj porazdelitev dane simetrične razlike?

Rešitev: Z verjetnostjo $1 - b/n$ število n ne bo v množici B. Tedaj tudi ne bo v dani simetrični razliki. Za prestala števila bo še vedno veljalo, da bodo v simetrični razliki z verjetnostjo $1/2$, neodvisno drugo od drugega. Če moč nove simetrične razlike označimo z Y, torej velja

$$P(Y = k \mid n \notin B) = \binom{n-1}{k} 2^{-n+1}\,.$$

Z verjetnostjo b/n pa bo število n v množici B in s tem tudi v dani v simetrični razliki. Za prestala števila bo spet veljalo, da bodo v simetrični razliki z verjetnostjo $1/2$, neodvisno drugo od drugega. Sledi

$$P(Y = k \mid n \in B) = \binom{n-1}{k-1} 2^{-n+1}\,.$$

Ob dogovoru, da je $\binom{m}{r} = 0$, če je $r < 0$ ali $r > m$, torej velja

$$P(Y = k) = \left[\left(1 - \frac{b}{n}\right)\binom{n-1}{k} + \frac{b}{n}\binom{n-1}{k-1}\right] 2^{-n+1}\,.$$

c. (5) Kaj lahko poveste o neodvisnosti dogodkov $\{X = k\}$ od dogodka, da je n element množice A?

Namig: pogojne verjetnosti teh dogodkov glede na dogodek, da n ni *element množice A, primerjajte z brezpogojnimi.*

Rešitev: Velja

$$\begin{aligned}
P(X = k | n \notin A) &= P(Y = k) \\
&= \left[\left(1 - \frac{b}{n}\right)\binom{n-1}{k} + \frac{b}{n}\binom{n-1}{k-1}\right] 2^{-n+1} \\
&= \left[1 - \frac{b}{n} + \frac{b}{n}\,\frac{n-k}{k}\right]\binom{n-1}{k-1} 2^{-n+1} \\
&= \left[1 + \frac{b}{k} - \frac{2b}{n}\right]\binom{n-1}{k-1} 2^{-n+1}\,,
\end{aligned}$$

medtem ko je

$$P(X = k) = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} 2^{-n}\,.$$

Odštejemo in dobimo

$$P(X = k | n \notin A) - P(X = k) = \frac{(n-2b)(2k-n)}{nk}\binom{n-1}{k-1} 2^{-n}\,.$$

Za $k = 1, 2, \ldots n$ sta torej dogodka $\{X = k\}$ in $\{n \notin A\}$ (ali $\{n \in A\}$) neodvisna natanko tedaj, ko je bodisi $b = n/2$ bodisi $k = n/2$.

Za $k = 0$ moramo poračunati posebej. Dobimo $P(X = 0 | n \notin A) = \left(1 - \frac{b}{n}\right) 2^{-n+1}$ in $P(X = 0) = 2^{-n}$. To dvoje je enako natanko tedaj, ko je $b = n/2$, in zgornji sklep še vedno velja.

5. (20) Slučajna spremenljivka X naj ima gostoto

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{3/2}}\, e^{-\frac{1}{2x}} & \text{za } x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

za neko konstanto c.

a. (10) Pokažite, da za $x > 0$ velja

$$F_X(x) = P\left(X \le x\right) = 2P\left(Z \ge \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,,$$

kjer je $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Rešitev: Po definiciji je

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x f_X(u)\,\mathrm{d}u \\ &= c\int_0^x \frac{1}{u^{3/2}}\, e^{-\frac{1}{2u}}\,\mathrm{d}u \\ &= 2c\int_{1/\sqrt{x}}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}\,\mathrm{d}v \qquad \textit{Nova spremenljivka: } \frac{1}{u} = v^2 \\ &= 2c\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1/\sqrt{x}}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}\,\mathrm{d}v \\ &= 2c\sqrt{2\pi}\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\,, \end{aligned}$$

pri čemer je Φ porazdelitvena funkcija standardizirane normalne porazdelitve. Ker mora iti $F_X(x) \to 1$, ko gre $x \to \infty$, mora veljati

$$2c\sqrt{2\pi}\lim_{x\to\infty}\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = c\sqrt{2\pi} = 1\,.$$

Sledi $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Trditev sledi.

b. (10) Naj bo spet $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Določite gostoto slučajne spremenljivke $Y = \frac{1}{Z^2}$.

Namig: najprej za $y > 0$ izračunajte $P(Y \le y)$.

Rešitev: Za $y > 0$ velja

$$\begin{aligned} P(Y \le y) &= P\left(\frac{1}{Z^2} \le y\right) = P\left(Z \le -\frac{1}{\sqrt{y}}\right) + P\left(Z \ge \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \\ &= 2P\left(Z \ge \frac{1}{\sqrt{y}}\right)\,. \end{aligned}$$

Iz prejšnje točke sledi, da za vse $y > 0$ velja $F_Y(y) = F_X(y)$, a za $y \le 0$ je očitno $F_Y(y) = F_X(y) = 0$. To pomeni, da ima Y enako porazdelitev, torej tudi enako gostoto kot X.

Slednje pa lahko ugotovimo tudi neposredno, brez sklicevanja na točko a. – za $y > 0$ pišemo

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right)$$

in po odvajanju dobimo

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^{3/2}}\,\Phi'\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}}\,e^{-\frac{1}{2y}}\,,$$

za $y \leq 0$ pa je $F_Y(y) = 0$ in posledično $f_Y(y) = 0$.

6. (20) Dana je naslednja različica *Monty Hallovega*[3] *paradoksa*: za enimi izmed trojih vrat je skrita nagrada, za preostalimi dvojimi ni ničesar. Igralec najprej pokaže na ena vrata, nakar vodja igre odpre ena izmed vrat, za katerima ni ničesar in na katera igralec ni pokazal. Nato igralec izbere ena izmed še zaprtih vrat in jih odpre (lahko torej ostane pri istem ali pa se premisli). Če se za temi vrati skriva nagrada, jo dobi, sicer ne dobi ničesar.

Nagrada je za prvimi vrati z verjetnostjo $\frac{1}{2}$, za drugimi vrati z verjetnostjo $\frac{3}{10}$ in za tretjimi z verjetnostjo $\frac{1}{5}$. Nadalje so v tabeli na desni prikazane verjetnosti, da vodja igre odpre j-ta vrata, če je igralec pokazal na i-ta vrata in je za temi vrati nagrada.

$i\backslash j$	1	2	3
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
2	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0

a. (10) Recimo, da igralec najprej pokaže na prva vrata, vodja igre pa odpre druga vrata. Kolikšna je pogojna verjetnost, da igralec dobi nagrado, če ostane pri istem? Kolikšna pa, če se premisli? Kaj od tega se mu bolj splača? Izračunajte še za primer, ko vodja igre odpre tretja vrata (igralec pa še vedno najprej pokaže na prva vrata).

Rešitev: Vodja igre lahko odpre druga vrata, če je nagrada za prvimi ali za tretjimi vrati. V prvem primeru vodja igre odpre druga vrata s pogojno verjetnostjo $1/4$ *in igralec dobi nagrado. V drugem primeru pa vodja igre z gotovostjo odpre druga vrata in igralec ne dobi nagrade. Ustrezna pogojna verjetnost je torej enaka:*

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = \frac{5}{13}\,.$$

Ko vodja igre odpre vrata, je vedno za enimi še neodprtimi vrati nagrada, za drugimi pa ne. Če se igralec premisli, je torej ustrezna pogojna verjetnost enaka $\frac{8}{13}$*, kar je več. Torej se igralcu splača premisliti.*

Če vodja igre odpre tretja vrata in igralec ostane pri istem, pa je ustrezna pogojna verjetnost enaka:

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{10}} = \frac{5}{9}\,,$$

če se igralec premisli, pa je ustrezna pogojna verjetnost enaka $\frac{4}{9}$*. Če vodja igre odpre tretja vrata, se torej igralcu splača ostati pri istem.*

b. (5) Recimo, da igralec pokaže na prva vrata, nakar glede na to, katera vrata odpre vodja igre, igra tako, kot se mu bolj splača. Kolikšna je verjetnost, da bo dobil nagrado?

Rešitev: Ločimo naslednje možnosti:

- *Če je nagrada za prvimi vrati in vodja igre odpre druga vrata, se bo igralec premislil, odprl bo tretja vrata in ne bo dobil nagrade.*

[3]Monte Halparin (1921–2017), bolj znan pod odrskim imenom Monty Hall, kanadsko-ameriški radijski in televizijski voditelj, producent in filantrop

- *Če je nagrada za prvimi vrati in vodja igre odpre tretja vrata, se igralec ne bo premislil in bo dobil nagrado.*
- *Če je nagrada za drugimi vrati, bo vodja igre odprl tretja vrata, igralec se ne bo premislil in ne bo dobil nagrade.*
- *Če je nagrada za tretjimi vrati, bo vodja igre dobil druga vrata, igralec se bo premislil in bo dobil nagrado.*

Iskana verjetnost je tako enaka:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{23}{40}\,,$$

kar je več kot v primeru, če ne gleda na to, katera vrata odpre vodja igre (tedaj je verjetnost, da dobi nagrado, enaka $\frac{1}{2}$*, če se premisli ali ne).*

c. (5) Se igralcu splača v prvem koraku pokazati na katera druga vrata?

Rešitev: Igralcu se bolj splača v prvem koraku pokazati na tretja vrata, potem pa se premisliti ne glede na to, katera vrata odpre vodja igre. V tem primeru bo namreč dobil nagrado, brž ko le-ta ne bo za tretjimi vrati, to pa se zgodi z verjetnostjo $\frac{4}{5}$*, kar je več kot* $\frac{23}{40}$*.*