

IME IN PRIIMEK: \_\_\_\_\_

VPISNA ŠT: 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

TEORETIČNI IZPIT

8. SEPTEMBER 2020

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

| Naloga | Točke |
|--------|-------|
| 1.     |       |
| 2.     |       |
| 3.     |       |
| 4.     |       |
| 5.     |       |
| 6.     |       |
| 7.     |       |
| 8.     |       |
| 9.     |       |
| 10.    |       |
| Skupaj |       |

1. Naj bodo  $A, B_1, B_2, \dots, B_n$  dogodki. Naj bo dogodek  $A$  neodvisen od dogodka  $B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \dots \cap B_{i_m}$  za vsak nabor indeksov  $z$   $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ . Pokažite, da je dogodek  $A$  neodvisen od dogodka  $\cup_{i=1}^n B_i$ .

2. Naj za slučajno spremenljivko  $X$  velja

$$P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}$$

za  $k = 1, 2, \dots$ , kjer je  $s > 1$  in

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Pokažite, da sta dogodka  $\{X \in \{2, 4, 6, \dots\}\}$  in  $\{X \in \{3, 6, 9, \dots\}\}$  neodvisna.

3. Naj za diskretne slučajne spremenljivke  $X, Y$  in  $Z$  velja

$$P(Z = z_m | X = x_k, Y = y_l) = P(Z = z_m | X = x_k)$$

za vsak možen par vrednosti  $x_k$  in  $y_l$  slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$  in za vsako možno vrednost  $z_m$ . Pokažite, da je

$$P(Z = z_m, Y = y_l | X = x_k) = P(Z = z_m | X = x_k)P(Y = y_l | X = x_k)$$

za vse  $x_k, y_l$  in  $z_m$ .

4. Pozitivne slučajne spremenljivke  $T, T', X, X'$  naj imajo gostoto oblike

$$f_{T, T', X, X'}(t, t', x, x') = g(t + t')h(x + x')$$

za funkciji  $g$  in  $h$ . Ali sta vsoti  $T + T'$  in  $X + X'$  neodvisni slučajni spremenljivki?

5. Naj bodo  $X_1 \sim \exp(1)$ , za slučajne spremenljivke  $X_2, \dots, X_n$  pa naj za  $k \geq 2$  velja

$$F_{X_k}(x) = \int_0^x e^{-s} F_{X_{k-1}}(x-s) ds.$$

Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke  $X_n$ .

6. Naj bodo  $X_1, X_2, \dots$  neodvisne z  $X_k \sim \text{Geom}(p)$  za  $k = 1, 2, \dots$ . Definirajte  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Naj bo  $a \geq n$  celo število. Utemeljite, da je

$$P(S_n \leq a < S_{n+1}) = P(Y = n),$$

kjer je  $Y \sim \text{Bin}(a, p)$ .

7. Predpostavite, da sta  $X \leq Y$  nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki in da velja

$$P(Y = l | X = k) = \psi(l - k)$$

za vse  $l \geq k \geq 0$ , kjer je  $\psi$  znana funkcija. Pokažite, da velja

$$E(Y) = E(X) + \sum_{k=0}^{\infty} k\psi(k).$$

8. Naj bodo  $U_1, U_2, \dots, U_n$  neodvisne in enakomerno porazdeljene na  $(0, 1)$ . Za  $0 < x < y < 1$  definirajte

$$X = \sum_{k=1}^n 1(U_k \leq x) \quad \text{in} \quad Y = \sum_{k=1}^n 1(U_k \leq y)$$

Izračunajte  $\text{cov}(X, Y)$ .

9. Naj bodo  $\xi_1, \xi_2, \dots$  neodvisne in celoštevilске slučajne spremenljivke z  $E(\xi_k) = 0$  za vse  $k = 1, 2, \dots$ . Definirajte

$$X_n = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \xi_i \xi_j \xi_k .$$

Izračunajte

$$E(X_{n+1} | \xi_1 = a_1, \dots, \xi_n = a_n) .$$

10. Naj bodo  $I_1, I_2, \dots, I_n$  neodvisne z  $I_k \sim \text{Bernoulli}(p_k)$  za  $k = 1, 2, \dots, n$ . Predpostavite, da je  $I_1 + I_2 + \dots + I_n \sim \text{Bin}(n, p)$ . Kakšni so lahko  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ?