

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

TEORETIČNI IZPIT

11. FEBRUAR 2020

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka številu pravilnih odgovorov, zaokroženo navzgor. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo dani dogodki $A_1, A_2, \dots, A_n$. Naj bo A dogodek, ki vsebuje izide, ki so vsebovani v natanko $n - 1$ od dogodkov $A_1, \dots, A_n$. Pokažite, da velja

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_{k+1} \cap \dots \cap A_n) - nP(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

2. Naj bodo $X_1, X_2, \dots, X_N$ slučajne spremenljivke z vrednostmi na $(0, 1)$, za katere je $P(X_k \leq x) \leq x$ za $x \in (0, 1)$. Pokažite, da velja

$$P(N \min(X_1, X_2, \dots, X_N) \leq x) \leq x$$

za vse $x \in (0, 1)$.

3. Za diskretni slučajni vektor (X, Y) z vrednostmi v $\mathbb{Z}^2$ naj velja

$$P(X = k, Y \in \{-l, l\}) = P(X = k)P(Y \in \{-l, l\})$$

za vse $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$. Sta X in Y nujno neodvisni?

4. Slučajne spremenljivke X, Y in Z naj imajo gostoto

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} g(x + y + z) & \text{za } x, y, z > 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

za neko nenegativno funkcijo g . Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke $W = X + Y + Z$.

5. Naj za slučajni spremenljivki X in Y velja $E(X) = E(Y) = 0$ in $\text{var}(X) = \text{var}(Y) = 1$ ter

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right).$$

Izračunajte $\text{cov}(X, Y)$.

6. Naj bodo Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke. Naj bo $X = Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4$. Navedite

$$f_{X|Z_1=z_1, Z_3=z_3}(x).$$

7. Naj bo X nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka. Količina

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2kP(X \geq k)?$$

je pričakovana vrednost funkcije slučajne spremenljivke X . Katere funkcije?

8. Naj bosta X in $N \geq 1$ celoštevilski slučajni spremenljivki in $\xi_1, \xi_2, \dots$ neodvisne celoštevilске enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $E(\xi_1) = 0$ in $E(\xi_1^2) = 1$. Naj bo

$$P(X = k | N = n) = P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = k).$$

Pokažite, da je $\text{var}(X) = E(N)$.

9. Ali obstajata neodvisni enako porazdeljeni nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y , za kateri je $X + Y \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$. Utemeljite odgovor.

10. Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \dots$ proces razvejanja. Naj bo A dogodek, da proces razvejanja izumre. Označite $\eta = P(A)$. Izpeljite formulo za

$$P(A | Z_n > 0)$$

za $n \geq 1$. Formula vsebuje rodovno funkcijo spremenljivke Z_n .

