

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

TEORETIČNI IZPIT

23. JUNIJ 2020

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Za dogodke A_1, A_2, \dots, A_n naj velja

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m} | B) = P(A_{i_1} | B) P(A_{i_2} | B) \dots P(A_{i_m} | B)$$

za vsak nabor indeksov $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$. Pokažite, da je

$$P(\cup_{k=1}^n A_k | B) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k | B)) .$$

2. Naj bo $U \sim U(0, 1)$ in $\alpha > 0$. Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke

$$X = (-\log U)^\alpha .$$

3. Naj za pozitivno slučajno spremenljivko X velja

$$P(X \leq x) = xP(X > x)$$

za vse $x > 0$. Pokažite, da ima X gostoto, in jo izračunajte.

4. Slučajne spremenljivke X, Y in Z naj imajo gostoto

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} g(x + y + z) & \text{za } x, y, z > 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

za neko nenegativno funkcijo g . Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke $W = X + Y + Z$.

5. Naj bo $n \geq 2$ naravno število in $0 < p < 1$. Ali obstajata neodvisni nekonstantni slučajni spremenljivki X in Y , za kateri je $X + Y \sim \text{Bin}(n, p)$? Utemeljite vaš odgovor.
6. Naj bosta X in Y strogo pozitivni nekonstantni slučajni spremenljivki. Ali sta lahko slučajni spremenljivki $U = XY$ in $V = Y/X$ neodvisni? Utemeljite vaš odgovor.
7. Slučajne spremenljivke X_0, X_1, \dots, X_n naj imajo pričakovano vrednost 0 in varianco 1. Nadalje naj bodo slučajne spremenljivke $X_0, X_1 - \rho X_0, \dots, X_n - \rho X_{n-1}$ neodvisne. Izračunajte $\text{cov}(X_0, X_n)$.
8. Naj bodo X_1, X_2, \dots, X_n neodvisne in eksponentno porazdeljene s parametri λ_k za $k = 1, 2, \dots, n$. Izračunajte verjetnost

$$P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > y)$$

za $y > 0$ in izpeljite gostoto spremenljivke

$$Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

9. Naj bosta X in Y enako porazdeljeni in neodvisni, $F(x)$ in $G(x)$ pa omejeni nepadajoči funkciji. Utemeljite, da je

$$E[(F(X) - F(Y))(G(X) - G(Y))] \geq 0.$$

Sklepajte, da je

$$\text{cov}(F(X), G(X)) \geq 0.$$

10. Za slučajni spremenljivki N in X naj velja $N \sim \text{Po}(\mu)$, X pa naj ima pogojno na $\{N = n\}$ binomsko porazdelitev s parametroma n in p . Binomsko porazdelitev s parametrom $n = 0$ interpretiramo kot porazdelitev, ki podeli točki 0 verjetnost 1. Katera od spodnjih trditev je pravilna?
- X ima binomsko porazdelitev.
 - X ima Poissonovo porazdelitev.
 - X ima geometrijsko porazdelitev.
 - X ima negativno binomsko porazdelitev.

Utemeljite vaš odgovor.