University of Primorska

FAMNIT, Mathematics

Probability

Exam

August 19th, 2020

Name and surname: ______________________ Identification number:

Instructions

Read carefully the text of the problems before attempting to solve them. Five problems out of six count for 100%. You are allowed one A4 sheet with formulae and theorems. You have two hours.

Problem	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Total					

1. (20) Prvih milijon nenegativnih celih števil zapišemo kot 000000, 000001,. . . ,999999. Naključno izberemo eno od števil, tako da imajo vsa števila enako verjetnost izbire.

a. (10) Naj bo A_i dogodek, da se v naključno izbranem številu števka i pojavi natanko dvakrat. Naj bodo $0 \leq i, j, k \leq 9$ različna števila. Izračunajte verjetnost dogodkov $P(A_i \cap A_j)$ in $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$.

Rešitev: Na 6 pozicijah se števke pojavljajo neodvisno ena od druge. Dogodek $A_i \cap A_j$ se lahko zgodi na različne načine. Dve poziciji za i in dve poziciji za j lahko izberemo na $\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} = 90$ načinov. Sledi

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{90 \cdot 8^2}{10^6} = \frac{5760}{10^6} \,.$$

S podobnim razmislekom dobimo

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{90}{10^6} \,.$$

b. (10) Izračunajte verjetnost, da se vsaj ena od števk 0,1,2,...,9 pojavi natanko dvakrat.

Rešitev: Podobno kot v prvem delu ugotovimo, da je

$$P(A_i) = \frac{15 \cdot 9^4}{10^6} = \frac{98415}{10^6} \,.$$

Po formuli za vključitve in izključitve in upoštevanjem, da so preseki več kot treh dogodkov A_i nemogoči dogodki, sledi

$$P\left(\cup_{i=0}^{9} A_i\right) = 10 \cdot P(A_0) - \binom{10}{2} P(A_0 \cap A_1) + \binom{10}{3} P(A_0 \cap A_1 \cap A_2) \,. = \frac{735750}{1000000} \,.$$

2. (20) Nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki imata porazdelitev dano z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{(a)_{k+l}}{2^{2k+2l+a} k! \cdot l!}$$

za $a > 0$ in $k, l \geq 0$, kjer je

$$(a)_0 = 1 \qquad \text{in} \qquad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$$

Pochhammerjev simbol. Definirajte $Z = X + Y$.

a. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke Z.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_n}{2^{2n+a} k! \cdot (n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_n}{2^{2n+a} k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{(a)_n}{n! \cdot 2^{2n+a}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ &= \frac{(a)_n}{n! \cdot 2^{n+a}} \,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Namig: po Newtonu je za $|x| < 1$

$$(1-x)^{-a} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_l}{l!} x^l \,.$$

Rešitev: Po formuli za robno porazdelitev je

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{l=0}^{\infty} P(X=k, Y=l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+l}}{2^{2k+2l+a} k! \cdot l!} \\
&= \frac{1}{2^{2k+a} k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+l}}{2^{2l} l!} \\
&= \frac{1}{2^{2k+a} k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_k \, (a+k)_l}{2^{2l} l!} \\
&= \frac{(a)_k}{2^{2k+a} k!} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-a-k} \\
&= \frac{2^a \, (a)_k}{3^{k+a} k!} \, .
\end{aligned}
$$

3. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{x^2}{2y}}$$

za $x \in \mathbb{R}$ in $y \geq 0$. Kot znano privzemite, da je za $a, b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} \exp\left(-au - \frac{b}{u}\right) du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}\,.$$

a. (10) Izračunajte gostoti $f_X(x)$ in $f_Y(y)$.

Rešitev: Gostoti dobimo kot robni gostoti. Računamo z uporabo znanega integrala

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-y - \frac{x^2}{2y}\right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\pi} e^{-|x|\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\,|x|}\,. \end{aligned}$$

Za $y \geq 0$ velja

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\, e^{-y} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2y}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\, e^{-y}\, \sqrt{2\pi y} \\ &= e^{-y}\,. \end{aligned}$$

Za $y < 0$ je $f_Y(y) = 0$.

b. (10) Naj bo

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y}}\,.$$

Izračunajte porazdelitev Z.

Rešitev: Računamo

$$
\begin{aligned}
P(Z \leq z) &= P\left(\frac{X}{\sqrt{Y}} \leq z\right) \\
&= P(X \leq z\sqrt{Y}) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{z\sqrt{y}} e^{-y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{x^2}{2y}}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{2\pi y}}\, \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{y}\, du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \int_0^\infty e^{-y}\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\,.
\end{aligned}
$$

Sledi $Z \sim N(0,1)$.

4. (20) Naj bo π permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Če je $\pi(i) > \pi(i-1)$ pravimo, da ima permutacija prirastek v točki $i \geq 2$. Privzemite, da izbirate permutacije naključno, tako da imajo vse enako verjetnost $\frac{1}{n!}$, da bodo izbrane. V tem primeru je število prirastkov permutacije slučajna spremenljivka X.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Zapišimo

$$X = \sum_{i=2}^{n} I_i \,,$$

kjer je

$$I_i = \begin{cases} 1 & \textit{če ima permutacija prirastek v } i \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Sledi

$$E(X) = \sum_{i=2}^{n} E(I_i) = \frac{n-1}{2}\,.$$

Uporabili smo simetrijo.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: Potrebovali bomo pričakovane vrednosti $E(I_i I_j)$. Ločimo več primerov: (i) če je $i = j$, je $E(I_i I_j) = E(I_i)$. (ii) če se i in j razlikujeta za 1 in je recimo $i < j$, potem je produkt $I_i I_j$ enak 1, če je $\sigma(i-1) < \sigma(i) < \sigma(i+1)$. Verjetnost za to je $\frac{1}{6}$, ker so vsi od možnih 6 vrstnih redov enako verjetni. Sledi, da je $\mathrm{cov}(I_i, I_j) = -\frac{1}{12}$. (iii) če se i, j razlikujeta za več kot 1, sta I_i in I_j neodvisna in je zato $\mathrm{cov}(I_i, I_j) = 0$. Računamo

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= \mathrm{var}\left(\sum_{i=2}^{n} I_i\right) \\ &= \sum_{i=2}^{n} \mathrm{var}(I_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{cov}(I_i, I_j) \\ &= \frac{n-1}{4} - \frac{2(n-2)}{12} \\ &= \frac{n-1}{12}\,. \end{aligned}$$

5. (20) Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki in $Z = X + Y$ njuna vsota.

a. (10) Recimo, da je $X \sim \text{Geom}(4/5)$ in $Z \sim \text{Geom}(2/3)$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

Opomba: vzamemo dogovor, po katerem je slučajna spremenljivka N porazdeljena geometrijsko $\text{Geom}(p)$, če je $P(N = n) = p(1-p)^{n-1}$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$

Rešitev: Rodovni funkciji slučajnih spremenljivk X in Z sta:

$$G_X(s) = \frac{4s}{5-s} \quad \textit{in} \quad G_Z(s) = \frac{2s}{3-s}\,.$$

Slučajna spremenljivka Y mora torej imeti rodovno funkcijo:

$$G_Y(s) = \frac{G_Z(s)}{G_X(s)} = \frac{5-s}{6-2s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3-s} = \frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{3^{n+1}}\,,$$

njena porazdelitev pa je podana s predpisom:

$$P(Y = 0) = \frac{5}{6}\,, \qquad P(Y = n) = \frac{1}{3^{n+1}}\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b. (10) Naj bo $0 < a, b < 1$. Določite potreben in zadosten pogoj za obstoj neodvisnih slučajnih spremenljivk X in Y, pri katerih je $X \sim \text{Geom}(a)$ in $X + Y \sim \text{Geom}(b)$.

Rešitev: Iskane slučajne spremenljivke obstajajo natanko tedaj, ko obstaja porazdelitev z rodovno funkcijo:

$$\begin{aligned}
G_Y(s) &= \frac{\frac{bs}{1-(1-b)s}}{\frac{as}{1-(1-a)s}} = \\
&= \frac{b}{a}\,\frac{1-(1-a)s}{1-(1-b)s} = \\
&= \frac{b}{a(1-b)}\left(1 - a + \frac{a-b}{1-(1-b)s}\right) = \\
&= \frac{b}{a} + \frac{b(a-b)}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(1-b)^{n-1}s^n\,.
\end{aligned}$$

Porazdelitev s tako rodovno funkcijo pa obstaja natanko tedaj, ko je $a \geq b$.

6. (20) Igralca A in B igrata naslednjo igro: vsak vrže neodvisno svoj kovanec. Če dobita oba grb, B plača A eno enoto denarja. Če dobita oba cifro, A plača B enoto denarja. Če dobita različna izida, nobeden od njiju ne plača ali dobi ničesar. Igrala bosta n=5.000 iger, za katere predpostavljamo, da so neodvisne.

a. (10) Skupni dobiček (izgubo) igralca A lahko zapišemo kot $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Kakšna je porazdelitev spremenljivk X_k? Izračunajte $E(X_1)$ in $\mathrm{var}(X_1)$.

   Rešitev: Igralec A na vsakem koraku pridobi ali 1 ali 0 ali -1 z verjetnostmi $1/4$, $1/2$ *in* $1/4$. *Sledi* $E(X_1) = 0$ *in* $\mathrm{var}(X_1) = 1/2$.

b. (10) Aproksimirajte verjetnost, da bo igralec A v 5.000 igrah priigral 50 enot denarja ali več.

   Rešitev: Računamo z uporabo centralnega limitnega izreka.

$$
\begin{aligned}
P(S_n \geq 50) &= P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n\mathrm{var}(X_1)}} \geq \frac{50}{\sqrt{n\mathrm{var}(X_1)}}\right) \\
&\approx P(Z \geq 1) \\
&= 1 - \Phi(1) \\
&= 0,157\,.
\end{aligned}
$$