Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

1. julij 2015

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (25) Na letalo z n sedeži se bo vkrcalo n potnikov. Vsi imajo že določeno številko sedeža, na letalo pa bodo prišli v istem vrstnem redu, kot so njihove številke sedežev. Prva oseba, ki pride na letalo, naključno izbere sedež s številkami $2, 3, \ldots, n$, tako da je verjetnost izbire vsakega sedeža $1/(n-1)$. Ostali se vsedejo na svoj sedež, če je prost, če ne, pa naključno izberejo med sedeži, ki so še na voljo. Označite z A_i dogodek, da bo i-ti potnik, ki se bo vkrcal, sedel na svoj sedež.

a. (10) Izračunajte $P(A_2)$ in $P(A_3)$.

Rešitev: Dogodek $P(A_2)$ se zgodi, če prvi potnik izbere sedež s številko $k > 2$. Sledi

$$P(A_2) = \frac{n-2}{n-1}\,.$$

Za A_3 obstajata dve možnosti: ali prvi potnik izbere sedež s števiko $k > 3$, ali pa izbere sedež s stevilko 2 in drugi potnik ne izbere sedeža s številko 3. Moznosti sta disjunktni zato je

$$P(A_3) = \frac{n-3}{n-1} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n-1}\,.$$

b. (10) Označite $H_k = \{\text{prvi potnik je izbral sedež } k\}$ za $k = 2, 3, \ldots, n$. Pokažite, da za $2 \leq k < n$ velja

$$P(A_n|H_k) = \frac{1}{n-k+1}\left[1 + P(A_n|H_{k+1}) + P(A_n|H_{k+2}) + \cdots + P(A_n|H_n)\right]\,.$$

Rešitev: Če je prvi potnik izbral sedež k za $2 \leq k \leq n-1$, bodo potniki s sedeži $2, 3, \ldots, k-1$ sedli na svoje sedeže, potnik s sedežem k pa bo naključno izbiral med sedeži $1, k+1, k+2, \ldots, n$. Če bo izbral sedež 1, bodo potniki s sedeži $k+1, k+2, \ldots, n$ sedli na svoje sedeže. Če bo izbral sedež $l > k$, bodo potniki $k+1, \ldots, l-1$ sedeli na svojih sedežih, situacija pa bo povsem enaka, kot če bi prvi potnik sedel na sedež l. Točno to pove zgornja formula.

2. (20) V razredu je 15 učencev. Prvo uro so vprašani štirje od njih, drugo uro pri drugem predmetu pa še pet učencev neodvisno od dogajanja prvo uro. Naj bo X število učencev, ki niso bili vprašani niti prvo niti drugo uro.

a. (10) Kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke X?

Rešitev: Predstavljajmo si, da so učenci kroglice v posodi. Tisti, ki so bili prvo uro vprašani, so bele, drugi pa rdeče. Nato iz posode potegnemo kroglice, ki ponazarjajo učence, ki tudi drugo uro niso bili vprašani. Seveda pa lahko interpretacijo prve in druge ure tudi zamanjamo. Kakor koli, slučajna spremenljivka X je porazdeljena hipergeometrijsko in lahko zavzame vrednosti 6, 7, 8, 9 ali 10. Sledi:

$$P(X = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{5}{11-k}}{\binom{15}{11}} = \frac{\binom{11}{k}\binom{4}{10-k}}{\binom{15}{10}}$$

Od tod izračunamo:

$$P(X = 6) = \frac{2}{13},\ P(X = 7) = \frac{40}{91},\ P(X = 8) = \frac{30}{91},\ P(X = 9) = \frac{20}{273}$$
$$P(X = 10) = \frac{1}{273}$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Za vsakega učenca, ki prvo uro ni bil vprašan, naj bo A_i dogodek, da tudi drugo uro ni bil vprašan ($i = 1, 2, \ldots 11$). Tedaj X šteje, koliko dogodkov A_i se zgodi, torej:

$$\begin{aligned} X &= I_{A_1} + \ldots + I_{A_{11}} \\ E(X) &= P(A_1) + \ldots + P(A_{11}) = 11 \cdot \frac{10}{15} = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

Druga možnost pa je, da pričakovano vrednost izračunamo po formuli $E(X) = \sum_k kP(X = k)$.

3. (20) Naj bo za zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki $X > 0$ in Y

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2x}} .$$

Predpostavite, da je $X \sim \exp(1)$.

a. (10) Naj bo

$$Z = \frac{Y - X}{\sqrt{X}} .$$

Pokažite, da sta slučajni spremenljivki X in Z neodvisni.

Namig: izračunajte $f_{Z|X=x}(z)$.

Rešitev: Če je U poljubna zvezna slučajna spremenljivke z gostoto $f_U(u)$, potem ima slučajna spremenljivka $V = aU + b$ gostoto

$$f_V(v) = \frac{1}{|a|} f_U\left(\frac{v-b}{a}\right) .$$

To pravilo lahko uporabimo tudi za pogojno gostoto. Sledi, da je

$$f_{Z|X=x}(z) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{x}(z+\sqrt{x}) - x\right)^2}{2x}\right) .$$

Pokrajšamo in sledi

$$f_{Z|X=x}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} .$$

Pogojna gostota je noedvisna od x, zato sta slučajni spremenljivki X in Z neodvisni.

b. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke Y. Kot znano privzemite, da za $a > 0$ in $b \geq 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{e^{-au-\frac{b}{u}}}{\sqrt{u}}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{ab}} .$$

Rešitev: Računamo z uporabo znanega integrala.

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dx \\
&= \int_0^\infty f_X(x) f_{Y|X=x}(y)dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2x}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2x}} e^y e^{-\frac{3x}{2}} dx \\
&= \frac{e^y}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3/2}} e^{-2\sqrt{(y^2/2)(3/2)}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}} e^y e^{-\sqrt{3}|y|} .
\end{aligned}
$$

4. (20) V posodi je 7 belih in 3 rdeče kroglice. Kroglice iz posode izbiramo naključno po vrsti brez vračanja. Naj bo X število belih kroglic, preden dobimo prvo rdečo kroglico, Y pa število belih kroglic med prvo in drugo rdečo kroglico.

a. (10) Poiščite večrazsežno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Rešitev: Možne vrednosti za slučajni spremenljivki so pari (k,l), za katere velja $k \geq 0$, $l \geq 0$ in $k+l \leq 7$. Dogodek $\{X=k, Y=l\}$ se zgodi, če izberemo najprej k belih kroglic, potem rdečo, potem l belih in spet rdečo kroglico. Računamo

$$
\begin{aligned}
&P(X=k, Y=l) = \\
&= \frac{7\cdot(7-1)\cdots(7-k+1)}{10\cdot(10-1)\cdots(10-k+1)}\cdot\frac{3}{10-k}\cdot \\
&\qquad \cdot\frac{(10-k)(10-k-1)\cdots(7-k-l+1)}{(10-k-1)\cdot(10-k-2)\cdots(10-k-l)}\cdot\frac{2}{(10-k-l-1)} \\
&= \frac{7\cdot(7-1)\cdots(7-k-l+1)\cdot 3\cdot 2}{10\cdot(10-1)\cdots(10-k-l-1)} \\
&= \frac{7!\cdot(10-k-l-2)!\cdot 3\cdot 2}{(7-k-l)!\cdot 10!}\,.
\end{aligned}
$$

b. (10) Pokažite, da imata spremenljivki X in Y enako porazdelitev. Izračunajte porazdelitev Y.

Namig: Porazdelitev X izračunajte posebej, ne kot robno porazdelitev. Nato uporabite simetrijo večrazsežne porazdelitve.

Rešitev: Slučajna spremenljivka X je število belih kroglic do prve rdeče. Dogodek $\{X=k\}$ se zgodi, če dobimo najprej k belih kroglic in nato rdečo. Dobimo

$$
P(X=k) = \frac{7\cdot(7-1)\cdots(7-k+1)\cdot 3}{10\cdot(10-1)\cdots(10-k+1)\cdot(10-k)}
$$

za $k=0,1,\ldots,7$. Po drugi strani dobimo porazdelitvi spremenljivk X in Y kot robni porazdelitvi dvorazsežne porazdelitve. Ker je ta porazdelitev simetrična funkcija k in l, morata biti porazdelitvi X in Y enaki. Ker poznamo porazdelitev X, poznamo tudi porazdelitev Y.

5. (20) Pošten kovanec mečemo, dokler ne dobimo ali dva grba ali dve številki zapovrstjo. Naj bo X potrebno število metov.

a. (10) Pokažite, da za vsako nenegativno celoštevilsko slučajno spremenljivko Y za $|s| < 1$ velja

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(Y > n) = \frac{1 - G_Y(s)}{1 - s} .$$

Namig: zapišite $P(Y > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(Y = k)$ *in obrnite vrstni red seštevanja.*

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(Y > n) &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{k=n+1}^{\infty} P(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k) \sum_{n=0}^{k-1} s^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k) \cdot \frac{1 - s^k}{1 - s} \\
&= \frac{1}{1 - s} \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k) \cdot \left(1 - s^k\right) \\
&= \frac{1}{1 - s} \left(1 - P(Y = 0) - (G_Y(s) - P(Y = 0))\right) \\
&= \frac{1 - G_Y(s)}{1 - s} .
\end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte $G_X(s)$ in navedite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Uporabimo lahko prvi del naloge. Dogodek $\{X > n\}$ *se lahko zgodi, če na prvih* n *metih dobimo izmenično grbe in številke ali izmenično številke in grbe. Obe možnosti imata enako verjetnost* 2^{-n}*, torej za* $n \geq 2$ *velja* $P(X >$

$n) = 2^{-(n-1)}$. Z upoštevanjem $P(X > 0) = P(X > 1) = 1$ računamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X > n) &= 1 + s + \sum_{n=2}^{\infty} s^n P(X > n) \\
&= 1 + s + \sum_{n=2}^{\infty} s^n 2^{-(n-1)} \\
&= 1 + s + \frac{s^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{2}\right)^n \\
&= 1 + s + \frac{s^2}{2(1 - s/2)} \\
&= 1 + s + \frac{s^2}{2 - s}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$(1 - s)\left(1 + s + \frac{s^2}{2 - s}\right) = 1 - G_X(s)$$

ali

$$G_X(s) = s^2\left(1 - \frac{1 - s}{2 - s}\right) = s^2 \frac{1}{2 - s}\,.$$

Sledi

$$P(X = n + 2) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

ali

$$P(X = n) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

za $n = 2, 3, \ldots$.

6. (20) Hazarder Marko obišče 100 igralnih avtomatov. Pred vsakim vrže pošten kovanec. Če pade cifra, na tem avtomatu igra, sicer pa ne. Na vsakem avtomatu ima, če igra, pričakovano izgubo 1 evro, standardni odklon pa je 3 evre. Privzamemo, da so posamezne igre in meti kovanca med seboj neodvisni.

a. (10) Izračunajte pričakovano vrednost in varianco Markovega izkupička po obisku vseh igralnih avtomatov.

Rešitev: Če z S označimo Markov izkupiček, potem ko obrede vse avtomate, lahko pišemo:

$$S = I_1 X_1 + I_2 X_2 + \cdots + I_{100} X_{100} \,,$$

kjer je $I_k = 1$, če je Marko igral na k-tem avtomatu, sicer pa je $I_k = 0$; X_k je Markov izkupiček na k-tem avtomatu (namišljen, če Marko tam ni igral). Računamo:

$$\begin{aligned} E(I_k X_k) &= E(I_k) E(X_k) = -\frac{1}{2} \,, \\ E(X_k^2) &= \operatorname{var}(X_k) + \big(E(X_k)\big)^2 = 10 \,, \\ E\big((I_k X_k)^2\big) &= E(I_k) E(X_k^2) = 5 \,, \\ \operatorname{var}(I_k X_k) &= E\big((I_k X_k)^2\big) - \big(E(I_k X_k)\big)^2 = \frac{19}{4} \,. \end{aligned}$$

ali alternativno:

$$E(I_k X_k | X_k = 0) = 0 \,, \qquad E(I_k X_k | X_k = 1) = -1 \,,$$
$$\operatorname{var}(E(I_k X_k | X_k)) = \frac{1}{4} \,,$$
$$\operatorname{var}(I_k X_k | X_k = 0) = 0 \,, \qquad \operatorname{var}(I_k X_k | X_k = 1) = 9 \,,$$
$$E(\operatorname{var}(I_k X_k | X_k)) = \frac{9}{2} \,,$$
$$\operatorname{var}(I_k X_k | X_k = 1) = \operatorname{var}(E(I_k X_k | X_k)) + E(\operatorname{var}(I_k X_k | X_k)) = \frac{19}{4} \,.$$

Torej je $E(S) = -100/2 = -50$ in $\operatorname{var}(S) = 100 \cdot 19/4 = 475$.

b. (10) Približno izračunajte verjetnost, da bo imel Marko na koncu dobiček.

Rešitev: Po centralnem limitnem izreku je:

$$P(S > 0) \approx 1 - \Phi\left(\frac{50}{\sqrt{475}}\right) \doteq 0{,}011 \,.$$