

UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAMNIT

VERJETNOST

PISNI IZPIT

2. SEPTEMBER 2020

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa dosežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Prvih milijon nenegativnih celih števil zapišemo kot 000000, 000001, ..., 999999. Naključno izberemo eno od števil, tako da imajo vsa števila enako verjetnost izbire.

- a. (10) Naj bo A_i dogodek, da se v naključno izbranem številu številka i pojavi natanko dvakrat. Naj bodo $0 \leq i, j, k \leq 9$ različna števila. Izračunajte verjetnost dogodkov $P(A_i \cap A_j)$ in $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$.

Rešitev: Na 6 pozicijah se številke pojavljajo neodvisno ena od druge. Dogodek $A_i \cap A_j$ se lahko zgodi na različne načine. Dve poziciji za i in dve poziciji za j lahko izberemo na $\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} = 90$ načinov. Sledi

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{90 \cdot 8^2}{10^6} = \frac{5760}{10^6}.$$

S podobnim razmislekom dobimo

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{90}{10^6}.$$

- b. (10) Izračunajte verjetnost, da se vsaj ena od števk 0,1,2,...,9 pojavi natanko dvakrat.

Rešitev: Podobno kot v prvem delu ugotovimo, da je

$$P(A_i) = \frac{15 \cdot 9^4}{10^6} = \frac{98415}{10^6}.$$

Po formuli za vključitve in izključitve in upoštevanjem, da so preseki več kot treh dogodkov A_i nemogoči dogodki, sledi

$$P\left(\bigcup_{i=0}^9 A_i\right) = 10 \cdot P(A_0) - \binom{10}{2} P(A_0 \cap A_1) + \binom{10}{3} P(A_0 \cap A_1 \cap A_2) = \frac{735750}{1000000}.$$

2. (20) Nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki imata porazdelitev dano z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{(a)_{k+l}}{2^{2k+2l+a} k! \cdot l!}$$

za $a > 0$ in $k, l \geq 0$, kjer je

$$(a)_0 = 1 \quad \text{in} \quad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$$

Pochhammerjev simbol. Definirajte $Z = X + Y$.

a. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke Z .

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(a)_n}{2^{2n+a} k! \cdot (n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(a)_n}{2^{2n+a} k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{(a)_n}{n! \cdot 2^{2n+a}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= \frac{(a)_n}{n! \cdot 2^{n+a}}. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X .

Namig: po Newtonu je za $|x| < 1$

$$(1-x)^{-a} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_l}{l!} x^l.$$

Rešitev: Po formuli za robno porazdelitev je

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{l=0}^{\infty} P(X = k, Y = l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+l}}{2^{2k+2l+a} k! \cdot l!} \\ &= \frac{1}{2^{2k+a} k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+l}}{2^{2l} l!} \\ &= \frac{1}{2^{2k+a} k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_k (a+k)_l}{2^{2l} l!} \\ &= \frac{(a)_k}{2^{2k+a} k!} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-a-k} \\ &= \frac{2^a (a)_k}{3^{k+a} k!} . \end{aligned}$$

3. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{x^2}{2y}}$$

za $x \in \mathbb{R}$ in $y \geq 0$. Kot znano privzemite, da je za $a, b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} \exp\left(-au - \frac{b}{u}\right) du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

a. (10) Izračunajte gostoti $f_X(x)$ in $f_Y(y)$.

Rešitev: Gostoti dobimo kot robni gostoti. Računamo z uporabo znanega integrala

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f_{X,Y}(x, y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-y - \frac{x^2}{2y}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\pi} e^{-|x|\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|}. \end{aligned}$$

Za $y \geq 0$ velja

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2y}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y} \sqrt{2\pi y} \\ &= e^{-y}. \end{aligned}$$

Za $y < 0$ je $f_Y(y) = 0$.

b. (10) Naj bo

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y}}.$$

Izračunajte porazdelitev Z .

Rešitev: Definiramo

$$\Phi(x, z) = \left(X, \frac{Y}{\sqrt{X}}\right).$$

Na $(0, \infty)^2$ je preslikava bijektivna in zvezno parcialno odvedljiva. Velja

$$\Phi^{-1}(x, z) = (x, \sqrt{xy}) ,$$

iz česar sledi $J_{\Phi^{-1}}(x, z) = \sqrt{x}$. Po transformacijski formuli je

$$f_{X,Z}(x, z) = e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} .$$

Ta gostota je produkt dveh gostot, iz česar razberemo $Z \sim N(0, 1)$.

4. (20) Naj bo π permutacija množice $\{1, 2, \dots, n\}$. Če je $\pi(i) > \pi(i-1)$ pravimo, da ima permutacija prirastek v točki $i \geq 2$. Privzemite, da izbirate permutacije naključno, tako da imajo vse enako verjetnost $\frac{1}{n!}$, da bodo izbrane. V tem primeru je število prirastkov permutacije slučajna spremenljivka X .

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Zapišimo

$$X = \sum_{i=2}^n I_i,$$

kjer je

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{če ima permutacija prirastek v } i \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Sledi

$$E(X) = \sum_{i=2}^n E(I_i) = \frac{n-1}{2}.$$

Uporabili smo simetrijo.

b. (10) Izračunajte $\text{var}(X)$.

Rešitev: Potrebovali bomo pričakovane vrednosti $E(I_i I_j)$. Ločimo več primerov: (i) če je $i = j$, je $E(I_i I_j) = E(I_i)$. (ii) če se i in j razlikujeta za 1 in je recimo $i < j$, potem je produkt $I_i I_j$ enak 1, če je $\sigma(i-1) < \sigma(i) < \sigma(i+1)$. Verjetnost za to je $\frac{1}{6}$, ker so vsi od možnih 6 vrstnih redov enako verjetni. Sledi, da je $\text{cov}(I_i, I_j) = -\frac{1}{12}$. (iii) če se i, j razlikujeta za več kot 1, sta I_i in I_j neodvisna in je zato $\text{cov}(I_i, I_j) = 0$. Računamo

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \text{var}\left(\sum_{i=2}^n I_i\right) \\ &= \sum_{i=2}^n \text{var}(I_i) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(I_i, I_j) \\ &= \frac{n-1}{4} - \frac{2(n-2)}{12} \\ &= \frac{n-1}{12}. \end{aligned}$$

5. (20) Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki in $Z = X + Y$ njuna vsota.

- a. (10) Recimo, da je $X \sim \text{Geom}(4/5)$ in $Z \sim \text{Geom}(2/3)$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Y .

Opomba: vzamemo dogovor, po katerem je slučajna spremenljivka N porazdeljena geometrijsko $\text{Geom}(p)$, če je $P(N = n) = p(1 - p)^{n-1}$ za $n = 1, 2, 3, \dots$

Rešitev: Rodovni funkciji slučajnih spremenljivk X in Z sta:

$$G_X(s) = \frac{4s}{5-s} \quad \text{in} \quad G_Z(s) = \frac{2s}{3-s}.$$

Slučajna spremenljivka Y mora torej imeti rodovno funkcijo:

$$G_Y(s) = \frac{G_Z(s)}{G_X(s)} = \frac{5-s}{6-2s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3-s} = \frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{3^{n+1}},$$

njena porazdelitev pa je podana s predpisom:

$$P(Y = 0) = \frac{5}{6}, \quad P(Y = n) = \frac{1}{3^{n+1}}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- b. (10) Naj bo $0 < a, b < 1$. Določite potreben in zadosten pogoj za obstoj neodvisnih slučajnih spremenljivk X in Y , pri katerih je $X \sim \text{Geom}(a)$ in $X + Y \sim \text{Geom}(b)$.

Rešitev: Iskane slučajne spremenljivke obstajajo natanko tedaj, ko obstaja porazdelitev z rodovno funkcijo:

$$\begin{aligned} G_Y(s) &= \frac{\frac{bs}{1-(1-b)s}}{\frac{as}{1-(1-a)s}} = \\ &= \frac{b}{a} \frac{1-(1-a)s}{1-(1-b)s} = \\ &= \frac{b}{a(1-b)} \left(1-a + \frac{a-b}{1-(1-b)s} \right) = \\ &= \frac{b}{a} + \frac{b(a-b)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (1-b)^{n-1} s^n. \end{aligned}$$

Porazdelitev s tako rodovno funkcijo pa obstaja natanko tedaj, ko je $a \geq b$.

6. (20) Igralca A in B igrata naslednjo igro: vsak vrže neodvisno svoj kovanec. Če dobita oba grb, B plača A eno enoto denarja. Če dobita oba cifro, A plača B enoto denarja. Če dobita različna izida, nobeden od njiju ne plača ali dobi ničesar. Igrala bosta $n=5.000$ iger, za katere predpostavljamo, da so neodvisne.

- a. (10) Skupni dobiček (izgubo) igralca A lahko zapišemo kot $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Kakšna je porazdelitev spremenljivk X_k ? Izračunajte $E(X_1)$ in $\text{var}(X_1)$.

Rešitev: Igralec A na vsakem koraku pridobi ali 1 ali 0 ali -1 z verjetnostmi $1/4$, $1/2$ in $1/4$. Sledi $E(X_1) = 0$ in $\text{var}(X_1) = 1/2$.

- b. (10) Aproximirajte verjetnost, da bo igralec A v 5.000 igrah priigral 50 enot denarja ali več.

Rešitev: Računamo z uporabo centralnega limitnega izreka.

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 50) &= P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n\text{var}(X_1)}} \geq \frac{50}{\sqrt{n\text{var}(X_1)}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 1) \\ &= 1 - \Phi(1) \\ &= 0,157. \end{aligned}$$