Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

3. junij 2020

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |



## Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

| Naloga | a. | b. | c. | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | • | |
| 2. | | | • | |
| 3. | | | • | |
| 4. | | | • | |
| 5. | | | • | |
| 6. | | | • | |
| Skupaj | | | • | |

**1.** (20) V standardnem kupu 52 kart je 13 različnih vrst kart, od vsake po 4. V igri *Baccarat* delilec kart vzame 8 standardnih kupov kart in jih dobro premeša. Privzamemo, da so vse permutacije 416 kart enako verjetne. Delilec z vrha kupa premešanih 416 kart vzame 52 kart.

a. (10) Kolikšna je verjetnost dogodka, da so med 52 kartami, ki jih delilec vzame z vrha, zastopane vse vrste kart? Binomskih simbolov in vsot vam ni treba poenostavljati.

*Rešitev: Označimo z $A$ dogodek, katerega verjetnost nas zanima. Označimo*

$$A_i = \{\textit{manjka vrsta } i \textit{ kart}\}$$

*za $i = 1, 2, \ldots, 13$, kjer smo vrste kart oštevilčili. Velja $A^c = \cup_{i=1}^{13} A_i$. Prvih 52 kart je zaradi dobrega mešanja naključen vzorec izmed vseh 416 kart. Računamo*

$$P(A_1) = \frac{\binom{416-32}{52}}{\binom{416}{52}}, \qquad P(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{416-64}{52}}{\binom{416}{52}}$$

*in splošno*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{\binom{416-32k}{52}}{\binom{416}{52}}$$

*za $k = 1, 2, \ldots, 11$; za $k = 12, 13$ je dogodek $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$ nemogoč. Po formuli za vključitve in izključitve in zaradi simetrije velja*

$$P(A^c) = \sum_{k=1}^{11} (-1)^{k-1} \binom{13}{k} \cdot \frac{\binom{416-32k}{52}}{\binom{416}{52}},$$

*torej je*

$$P(A) = \sum_{k=0}^{11} (-1)^{k} \binom{13}{k} \cdot \frac{\binom{416-32k}{52}}{\binom{416}{52}},$$

*Numerični izračun pokaže*

$$P(A) \doteq 0{,}8554971\,.$$

b. (10) Ena izmed vrst kart je tudi as. Naj bo $B$ dogodek, da je med vrhnjimi 52 kartami vsaj en as, in $A$ dogodek, da so med 52 kartami, ki jih vzame delilec, zastopane vse vrste kart. Izračunajte $P(A|B)$. Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

*Rešitev: Opazimo, da je* $A \subseteq B$*, torej je*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{1 - P(B^c)} = \frac{P(A)}{1 - \frac{\binom{416-32}{52}}{\binom{416}{52}}} = \frac{P(A)}{1 - \frac{\binom{384}{52}}{\binom{416}{52}}}\,.$$

*Numerični izračun pokaže*

$$P(A|B) \doteq 0{,}865574\,.$$

**2.** (20) V posodi je $B \geq 2$ belih in $R$ rdečih kroglic. Kroglice iz posode izbiramo zapovrstjo naključno brez vračanja. Naj bo $X$ število izbiranj do vključno prve bele kroglice, $Y$ pa število izbiranj do vključno druge bele kroglice.

a. (10) Izračunajte *skupno* porazdelitev slučajnih spremenljivk $X$ in $Y$.

*Rešitev: Možni pari vrednosti za slučajni spremenljivki $X$ in $Y$ so vsi celoštevilski pari $(k, l)$, za katere je $1 \leq k < l \leq R+2$. Če naj se dogodek $\{X = k, Y = l\}$ zgodi, moramo najprej dobiti $k-1$ rdečih kroglic, belo, $l-k-1$ rdečih in spet belo. Označimo $N = B + R$. Verjetnost danega dogodka lahko izračunamo kot*

$$
\begin{aligned}
P(X = k, Y = l) &= \frac{R}{N} \cdot \frac{R-1}{N-1} \cdots \frac{R-k+2}{N-k+2} \cdot \frac{B}{N-k+1} \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{R-k+1}{N-k} \cdots \frac{R-l+3}{N-l+2} \cdot \frac{B-1}{N-l+1} \\
&= \frac{B(B-1)\, R!\, (N-l)!}{(R-l+2)!\, N!}
\end{aligned}
$$

*ali kot*

$$
P(X = k, Y = l) = \frac{\binom{N-l}{B-2}}{\binom{N}{B}} = \frac{B(B-1)\, R!\, (N-l)!}{(R-l+2)!\, N!}\,.
$$

b. (10) Utemeljite, da za vse $l = 2, 3, \ldots, R+2$ in $k = 1, 2, \ldots, l-1$ velja

$$
P(X = k, Y = l) = \frac{1}{l-1}\, P(Y = l)\,.
$$

*Rešitev: Uporabimo formulo za robno porazdelitev*

$$
P(Y = l) = \sum_{k=1}^{l-1} P(X = k, Y = l)
$$

*in opazimo, da so vse verjetnosti v vsoti enake (neodvisne od $k$). Trditev sledi.*

**3.** (20) Naj ima slučajna spremenljivka $T_a$ gostoto

$$f_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

za $a > 0$ in $t > 0$.

a. (10) Predpostavite, da sta $T_a$ in $Z$ neodvisni z $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Poiščite gostoto $W = \sqrt{T_a} Z$.

*Rešitev: Definiramo*

$$\Phi(t,z) = (t, \sqrt{t} z)\,.$$

*Imamo*

$$\Phi^{-1}(t,w) = \left(t, w/\sqrt{t}\right) \qquad in \qquad J_{\Phi^{-1}}(t,w) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,.$$

*Par* $(T_a, W)$ *ima gostoto*

$$f_{T_a,W}(t,w) = f_a(t) f_Z\left(\frac{w}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\,.$$

*Gostoto* $W$ *izračunamo s formulo za robno gostoto. Dobimo*

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t^2} e^{-\frac{a^2}{2t}} e^{-\frac{w^2}{2t}}\, dt \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{(a^2+w^2)v}{2}}\, dv \\ &= \frac{a}{\pi(a^2+w^2)}\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte gostoto

$$Y = \frac{1}{1 + T_1 Z^2}\,.$$

*Rešitev: Slučajna spremenljivka* $Y$ *bo imela vrednosti na* $(0,1)$ *z verjetnostjo* $1$.

*Za* $y \in (0,1)$ *računamo*

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P\left(\frac{1}{1+T_1Z^2} \leq y\right) \\ &= P\left(T_1Z^2 \geq \frac{1}{y} - 1\right) \\ &= P\left(\sqrt{T_1}|Z| \geq \sqrt{\frac{1}{y} - 1}\right) \\ &= 2P\left(\sqrt{T_1}Z \geq \sqrt{\frac{1}{y} - 1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1}{y} - 1}\right) . \end{aligned}$$

*Odvajamo in dobimo*

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{2}{\pi\left(1+\frac{1-y}{y}\right)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-y}\cdot y^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}} . \end{aligned}$$

*Z drugimi besedami* $Y \sim \mathrm{Beta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

**4.** (20) Naj bo $X_1 = 1$. Privzemite, da za $n = 2, 3, \ldots$ velja

$$P\left(X_{n+1} = k | X_n = k\right) = \frac{n+1-k}{n+1} \quad \text{in} \quad P\left(X_{n+1} = k+1 | X_n = k\right) = \frac{k}{n+1}$$

za $k = 1, \ldots, n$. Naj bo

$$Y_n = \frac{X_n(X_n+1)}{(n+1)(n+2)}\,.$$

a. (10) Izračunajte

$$E\left(Y_{n+1} | X_n = k\right)\,.$$

*Rešitev: Po definiciji je*

$$\begin{aligned} & E\left(\frac{X_{n+1}(X_{n+1}+1)}{(n+2)(n+3)} | X_n = k\right) \\ = \quad & \frac{1}{(n+2)(n+3)}\left(k(k+1)\cdot\frac{n+1-k}{n+1} + (k+1)(k+2)\frac{k}{n+1}\right) \\ = \quad & \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot k(k+1)((n+1-k)+(k+2)) \\ = \quad & \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X_n)$.

*Rešitev: Po formuli za popolno pričakovano vrednost je*

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n} E(Y_{n+1}|X_n = k)P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}P(X_n = k) \\ &= E(Y_n)\,. \end{aligned}$$

*Opazimo, da je* $E(Y_1) = 1/3$. *Sledi*

$$E\left(X_n(X_n+1)\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{3}\,.$$

*Za izračun variance potrebujemo* $E(X_n)$. *Iz pogojne porazdelitve dobimo*

$$E(X_{n+1}) = \frac{n+2}{n+1}E(X_n)\,,$$

*kar nam da* $E(X_1) = 1$ *in* $E(X_n) = \frac{1}{2}(n+1)$. *Sledi*

$$\mathrm{var}(X_n) = E(X_n(X_n+1)) - E(X_n) - E(X_n)^2\,,$$

*kar nam da*

$$\mathrm{var}(X_n) = \frac{n^2-1}{12}\,.$$

**5.** (20) Naj bo $N$ nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka, za katero velja

$$P(N=n)=\left(a+\frac{b}{n}\right)P(N=n-1)\,;\quad n=1,2,3,\ldots\,,$$

kjer $a\in[0,1)$ in $b\geq 0$. Za rodovno funkcijo slučajne spremenljivke $N$ velja

$$(1-as)G_N'(s)=(a+b)G_N(s)\,.$$

Ta enačba tudi enolično določa $G_N$.

a. (10) Izračunajte $E(N)$ in $\mathrm{var}(N)$.

*Rešitev: Imamo*

$$\lim_{s\uparrow 1}(1-as)G_N'(s)=\lim_{s\uparrow 1}(a+b)G_N(s)\,.$$

*Ker je $G_N(s)$ zvezna na $[-1,1]$, velja*

$$\lim_{s\uparrow 1}(a+b)G_N(s)=(a+b)G_N(1)=(a+b)\,.$$

*Na levi strani imamo*

$$\lim_{s\uparrow 1}(1-as)G_N'(s)=(1-a)\lim_{s\uparrow 1}G_N'(s)=(1-a)E(X)\,.$$

*Sledi*

$$E(N)=\frac{a+b}{1-a}\,.$$

*Odvajamo začetno enačbo z $G_N$ in za $s\in(-1,1)$ dobimo*

$$-aG_N'(s)-(1-as)G_N''(s)=(a+b)G_N'(s)\,.$$

*Vzamemo limite $s\uparrow 1$ in dobimo*

$$-aE(N)+(1-a)E\left[N(N-1)\right]=(a+b)E(N)$$

*Preuredimo v*

$$-E(N)+(1-a)E(N^2)=(a+b)E(N)\,.$$

*Imamo*

$$E(N^2)=\frac{(1+a+b)E(N)}{1-a}\,.$$

*Sledi*

$$\mathrm{var}(N)=\frac{(1+a+b)(a+b)}{(1-a)^2}-\frac{(a+b)^2}{(1-a)^2}\,.=\frac{a+b}{(1-a)^2}\,.$$

b. (10) Naj bodo $I_1, I_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $I_1 \sim \text{Bernoulli}(p)$. Naj bo $X = I_1 + \cdots + I_N$. Za $X$ velja

$$P(X = n) = \left(\tilde{a} + \frac{\tilde{b}}{n}\right) P(X = n-1)\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

za $\tilde{a}$ in $\tilde{b}$. Izračunajte $\tilde{a}$ in $\tilde{b}$.

*Rešitev: Vemo, da velja* $G_X(s) = G_N(G_{I_1}(s))$. *Po definiciji* $G_{I_1}(s) = q + ps$, *kjer* $q = 1 - p$. *Imamo*

$$G_X(s) = G_N(q + ps)\,.$$

*Odvajamo in dobimo*

$$G_X'(s) = p\,G_N'(q + ps)\,,$$

*zato*

$$\frac{G_X'(s)}{G_X(s)} = p\,\frac{G_N'(q+ps)}{G_N(q+ps)} = p\,\frac{a+b}{1 - aq - aps} = \frac{\frac{ap}{1-aq} + \frac{bp}{1-aq}}{1 - \frac{aps}{1-aq}}\,.$$

*Iz enačbe poračunamo* $\tilde{a} = \frac{ap}{1-aq}$ *in* $\tilde{b} = \frac{bp}{1-bq}$. *Uporabili smo enoličnost.*

**6.** (20) Ponujena vam je naslednja igra na srečo: iz škatle, v kateri je veliko število listkov s števili, lahko naključno izberete 1000 listkov z vračanjem. Če je vsota izbranih števil med vključno $a$ in $a + 100$, dobite stavo, sicer jo izgubite. Število $a$ si lahko še izberete. O škatli veste le to, da je povprečje 0,1 in standardni odklon 1,5811.

a. (10) Kolikšna je približno verjetnost, da boste stavo dobili, če si izberete $a = 0$? Stavo torej dobite, če je vsota med vključno 0 in 100. Upoštevajte, da je $\Phi(-2) = 0,0228$.

*Rešitev: Uporabimo centralni limitni izrek. Označimo vsoto s* $S_{1000}$. *Vemo, da je*

$$\begin{aligned}
P(0 \leq S_n \leq 100) &= P(-100 \leq S_{1000} - 100 \leq 0) \\
&= P(-\frac{100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{S_{1000} - 100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq 0) \\
&\approx P(-2 \leq Z \leq 0) \\
&= 0,48\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Katera izbira za $a$ je za vas najugodnejša? Utemeljite in izračunajte približno verjetnost za dobitek za izbrani $a$. Upoštevajte, da je $\Phi(1) = 1 - \Phi(-1) = 0,8413$.

*Rešitev: Če si predstavljamo histogram za vsoto* $S_{1000}$, *vemo da bo simetričen okrog pričakovane vrednosti* $\mu = 100$, *višine blokov pa bodo padale na vsako stran. Ker smemo izbrati le bloke z intervala dolgega 100, bomo seveda izbrali najvišje bloke okrog* $\mu$, *torej interval od 50 do 150. Računamo*

$$\begin{aligned}
&P(50 \leq S_n \leq 150) \\
&\quad = P(-50 \leq S_{1000} - 100 \leq 50) \\
&\quad = P(-\frac{50}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{S_{1000} - 100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{50}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811}) \\
&\quad \approx P(-1 \leq Z \leq 1) \\
&\quad = 0,68\,.
\end{aligned}$$