Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

4. september 2018

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V gledališču je n sedežev. Na blagajni so prodali n oštevilčenih kart. Ljudje so po vrsti dobili karte za sedeže $1, 2, \ldots, n$ in prihajajo v gledališče po tem vrstnem redu. Gost 1 izbere sedež naključno med n sedeži. Ostali gosti se usedejo na svoj sedež, če je ta prost, sicer pa naključno izbirajo med preostalimi sedeži.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo sedež gosta 3, ko le-ta pride v dvorano, še nezaseden?

Rešitev: Označimo z A dogodek, katerega verjetnost želimo izračunati. Dogodek A^c se lahko zgodi na dva disjunktna načina:

- $A_1 = \{$*gost 1 se vsede na sedež 3, gost 2 se vsede na sedež 2*$\}$;
- $A_2 = \{$*gost 1 se vsede na sedež 2, gost 2 se vsede na sedež 3*$\}$;

Računamo

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P(A_1) + P(A_2) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1} . \end{aligned}$$

b. (10) Recimo, da je $n = 100$. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo sedež gosta 50 še prost, ko le-ta stopi v dvorano, pri pogoju, da je po prihodu gostov $1, 2, \ldots, 49$ med sedeži $1, 2, \ldots, 49$ zasedeno 30 sedežev?

Rešitev: Označimo dogodek z naloge z A. Iz besedila naloge razberemo, da je od 49 *gostov, ki so v dvorano prišli pred gostom* 50, 19 *gostov naključno izbiralo med sedeži* $50, 51, \ldots, 100$. *Če ne želimo, da bi bil sedež* 50 *zaseden, je prvi med temi izbiral med* 51 *sedeži in ni izbral* 50, *drugi med* 50 *in ni izbral* 50, ..., 19-*ti med* $51 - 18 = 33$ *sedeži in ni izbral* 50. *Označimo pogoj z B. Sledi*

$$P(A|B) = \frac{50}{51} \cdot \frac{49}{50} \cdots \frac{32}{33} = \frac{32}{51} .$$

2. (20) Vektor indikatorjev $(I_1, I_2, \ldots, I_N)$ naj ima porazdelitev

$$P\left(I_1 = i_1, \ldots, I_N = i_N\right) = \frac{1}{\binom{N}{n}}$$

za vse nabore z $i_k \in \{0,1\}$ in $i_1 + i_2 + \cdots + i_N = n$ za neki fiksen $n > 0$. Za $b < N$ naj bo $X_b = I_1 + I_2 + \cdots + I_b$.

a. (5) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X_b.

Rešitev: Slučajna spremenljivka X_b lahko zavzame vrednosti k z omejitvijo

$$\max(0, n - N + b) \leq k \leq \min(b, n)\,.$$

Računamo

$$P\left(X_b = k\right) = \frac{\binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}\,.$$

Velja torej $X_b \sim \mathrm{HiperGeom}(n, b, N)$.

b. (5) Izračunajte $P(I_k = 1)$ in $P(I_k = 1, I_l = 1)$ za $k \neq l$.

Rešitev: Zaradi simetrije so vse verjetnosti $P(I_k = 1)$ enake in vse verjetnosti $P(I_k = 1, I_l = 1)$ enake. Dopustnih naborov, pri katerih je $i_k = 1$, je $\binom{N-1}{n-1}$, dopustnih naborov z $i_k = 1, i_l = 1$ pa je $\binom{N-2}{n-2}$. Sledi

$$P(I_k = 1) = \frac{n}{N} \qquad \textit{in} \qquad P(I_k = 1, I_l = 1) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}\,.$$

To pa lahko dobimo tudi iz hipergeometrijske porazdelitve: velja namreč $P(I_k = 1) = P(X_1 = 1)$ in $P(I_k = 1, I_l = 1) = P(I_k + I_l = 2) = P(X_2 = 2)$.

c. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X_b)$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X_b) &= \sum_{k=1}^{b} \mathrm{var}(I_k) + \sum_{\substack{1 \leq k, l \leq b \\ k \neq l}} \mathrm{cov}(I_k, I_l) \\
&= b \cdot \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) + b(b-1)\left(\frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \frac{n^2}{N^2}\right) \\
&= n \cdot \frac{b}{N} \cdot \frac{N-b}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}\,.
\end{aligned}$$

3. (20) Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z dvorazsežno gostoto:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x\,e^{-x} & ;\ x > 0,\ -ax^2 < y < ax^2 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases},$$

kjer je $a > 0$.

a. (10) Določite konstanto a.

Rešitev: Iz:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_{-ax^2}^{ax^2} x\,e^{-x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2a \int_0^\infty x^3\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = 12a$$

izračunamo $a = 1/12$.

b. (10) Izračunajte gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $Z = XY$.

Rešitev: Označimo $h(x, y) = xy$ *in fiksirajmo* $x \neq 0$. *Enačba* $h(x, y) = z$ *ima edino rešitev* $y = z/x$ *in velja* $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = x$. *Torej velja:*

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\substack{x>0 \\ -x^2/12<z/x<x^2/12}} \frac{x}{|x|}\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\sqrt[3]{12|z|}}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\ &= e^{-\sqrt[3]{12|z|}}. \end{aligned}$$

4. (20) Kup m rdečih in m črnih kart dobro premešamo, tako da so vsi vrstni redi enako verjetni. Karte bomo delili od vrha eno po eno. Označimo $n = 2m$ število vseh kart. Za fiksen k z $1 \leq k \leq n$ definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k \text{ ta karta od vrha kupa rdeča} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

in X_k število rdečih kart med k razdeljenimi kartami od vrha.

a. (10) Za $2 \leq k \leq n$ izračunajte $P(I_k = 1, X_{k-1} = j)$, kjer je $\max(0, k-m-1) \leq j \leq \min(k-1, m)$.

Namig: $P(I_k = 1, X_{k-1} = j) = P(X_{k-1} = j)P(I_k = 1 | X_{k-1} = j)$.

Rešitev: Zaradi simetrije je prvih $k-1$ razdeljenih kart vzorec velikosti $k-1$ izmed vseh n kart. Sledi, da je $X_{k-1} \sim \text{HiperGeom}(k-1, m, n)$. Pogojno na $\{X_{k-1} = j\}$ bo k-ta karta naključno izbrana izmed $n-k+1$ preostalih kart, med katerimi je $m-j$ rdečih, torej bo

$$P(I_k = 1 | X_{k-1} = j) = \frac{m-j}{n-k+1}\,.$$

Sledi

$$P(I_k = 1, X_{k-1} = j) = \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \frac{m-j}{n-k+1}\,.$$

b. (10) Igralec na srečo lahko po razdeljenih $k-1$ kartah stavi, da bo naslednja karta rdeča. Odloči se, da bo stavil, če bo med še nerazdeljenimi kartami več ali enako rdečih kart kot črnih. Izračunajte verjetnost, da bo igralec stavil in pravilno napovedal rdečo karto. Verjetnost izrazite z ustrezno vsoto, ki je ni treba eksplicitno izračunati.

Rešitev: Če je po $k-1$ kartah razdeljeno j rdečih kart, bo igralec stavil, če bo $m - j \geq m - [(k-1) - j]$, ali z drugimi besedami $k - 1 \geq 2j$. Iskani dogodek, označimo ga z A, lahko torej zapišemo kot

$$A = \cup_{\min(0,k-m-1) \leq 2j \leq k-1} \{X_{k-1} = j, I_k = 1\}\,.$$

Dogodki v uniji so disjunktni, zato je

$$P(A) = \sum_{\min(0,k-m-1) \leq 2j \leq k-1} \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \frac{m-j}{n-k+1}\,.$$

Vsoto nekoliko predelamo v

$$P(A) = \frac{m}{n-k+1} \sum_{\min(0,k-m-1) \leq 2j \leq k-1} \frac{\binom{m-1}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n}{k-1}}\,.$$

5. (20) Naj bo Π_n naključna permutacija n elementov. Predpostavljamo, da so vse permutacije enako verjetne. Naj bo X_n število fiksnih točk v Π_n in $G_n(s)$ rodovna funkcija slučajne spremenljivke X_n.

a. (10) Pokažite, da za $j \geq 0$ velja

$$P(X_n = j) = (j+1)\, P(X_{n+1} = j+1)\,.$$

Rešitev: Verjetnost, da ima permutacija n elementov natanko j fiksnih točk, dobimo tako, da izberemo j fiksnih točk, ostalih $n-j$ elementov pa mora biti permutiranih tako, da ni nobene fiksne točke. Sledi

$$P(X_n = j) = \frac{1}{j!}\, P(X_{n-j} = 0)\,.$$

Trditev iz naloge sledi.

b. (5) Pokažite, da je $G'_{n+1}(s) = G_n(s)$, in izrazite $G_n(s)$ kot polinom v spremenljivki $s-1$.

Rešitev: Enakost iz prejšnje točke množimo z s^j in seštejemo po j za $j = 0, 1, \ldots, n$. Dobimo

$$\begin{aligned}
G_n(s) &= \sum_{j=0}^{n} P(X_n = j)\, s^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} (j+1)\, P(X_{n+1} = j+1)\, s^j \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k\, P(X_{n+1} = k)\, s^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k\, P(X_{n+1} = k)\, s^{k-1} \\
&= G'_{n+1}(s)\,.
\end{aligned}$$

Permutacija enega elementa ima vedno natanko eno fiksno točko, torej je $G_1(s) = s = 1 + (s-1)$. Nadaljnje rodovne funkcije dobimo z integracijo. Ob upoštevanju dejstva, da je $G_n(1) = 1$, izračunamo

$$G_2(s) = 1 + (s-1) + \frac{(s-1)^2}{2}\,, \qquad G_3(s) = 1 + (s-1) + \frac{(s-1)^2}{2} + \frac{(s-1)^3}{6}\,,$$

nakar z indukcijo dokažemo, da je

$$G_n(s) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(s-1)^r}{r!}\,.$$

c. (5) Za vse $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ izračunajte $P(X_n = k)$. Vsot vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: V polinomu iz prejšnje točke moramo najti koeficiente pri potenci s^k. Za izraz $\frac{(s-1)^r}{r!}$ je le-ta enak $\frac{(-1)^{r-k}}{r!}\binom{r}{k} = \frac{(-1)^{r-k}}{k!\,(r-k)!}$, če je $r \geq k$, sicer pa je enak nič. Sledi

$$P(X_n = k) = \sum_{r=k}^{n} \frac{(-1)^{r-k}}{k!\,(r-k)!}\,.$$

6. (20) Igralniška hiša se odloči, da bo naslednjim $n = 30.000$ gostom ponudila promocijsko igro. Vsak gost bo vrgel pošteno kocko. Če bo dobil 6, bo lahko vstopil zastonj in dobil še dva eura. Če bo dobil 5, bo lahko vstopil zastonj. V vseh drugih primerih bo gost plačal običajno vstopnino 1 euro.

a. (10) Naj bo X_1 čisti dobiček hiše za prvega gosta. Izračunajte $E(X_1)$ in $\mathrm{var}(X_1)$.

Rešitev: Možne vrednosti za slučajno spremenljivko X_1 so -2, 0 in 1 z verjetnostmi $1/6$, $1/6$ in $4/6$. Sledi

$$E(X_1) = \frac{-2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{1}{3} \quad \textit{in} \quad \mathrm{var}(X_1) = \frac{4}{6} + \frac{4}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}\,.$$

b. (10) Izračunajte verjetnost, da bo skupni čisti dobiček manjši od 10.490 eurov.

Rešitev: Označimo $S_{30000} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{30000}$ in računamo z uporabo centralnega limitneg izreka.

$$\begin{aligned}
P(S_{30000} \leq 10490) &= P(S_{30000} - 10000 \leq 10490 - 10000) \\
&= P\left(\frac{S_{10000} - 10000}{\sqrt{30000} \cdot \sqrt{11/9}} \leq \frac{10490 - 10000}{\sqrt{30000} \cdot \sqrt{11/9}}\right) \\
&= P\left(\frac{S_{10000} - 10000}{\sqrt{30000} \cdot \sqrt{11/9}} \leq 2,56\right) \\
&\approx P(Z \leq 2,56) \\
&= 0,9948\,.
\end{aligned}$$