Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

6. september 2016

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.				•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Črke A,A,A,A,A,B,B,K,D,R,R naključno permutiramo, tako da je vsak vrstni red enako verjeten. Označimo

$$B = \{\text{prva črka v slučajni permutaciji je A}\}$$

in

$$C = \{\text{slučajna permutacija črk } \textbf{ni} \text{ ABRAKADABRA}\}\,.$$

a. (10) Izračunajte $P(C^c)$.

Rešitev: Začnimo s prvim mestom. Verjetnost, da bo na prvem mestu črka A, je $5/11$*. Pogojno na ta dogodek, je verjetnost, da bo na drugem mestu B, enaka* $2/10$*. Podobno nadaljujemo in dobimo, da je iskana verjetnost*

$$\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5!\cdot 2!\cdot 2!}{11!}\,.$$

b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost $P(C|B)$.

Namig: $P(B\cap C) = P(B) - P(B\cap C^c)$.

Rešitev: Vemo, da je $P(B) = 5/11$*. Izračunati moramo* $P(B\cap C)$*. Upoštevamo namig in izračunamo*

$$P(B\cap C^c) = P(C^c)\,,$$

torej

$$P(B\cap C) = \frac{5}{11} - \frac{5!\cdot 2!\cdot 2!}{11!}\,.$$

Sledi

$$P(C|B) = 1 - \frac{4!\cdot 2!\cdot 2!}{10!}\,.$$

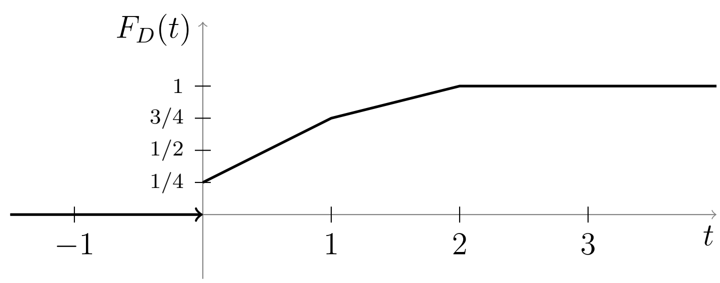
2. (20) Na intervalu $[-2, 2]$ na slepo izberemo število. Označimo z D oddaljenost tega števila od intervala $[0, 1]$.

a. (10) Izračunajte porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke D in narišite njen graf.

Rešitev: Ločimo več primerov:

- *Za* $t < 0$ *je očitno* $F_D(t) = P(D \leq t) = 0$.
- *Za* $t = 0$ *je* $\{D \leq t\} = \{D = 0\}$ *dogodek, da je število na intervalu* $[0, 1]$. *Torej je* $F_D(0) = 1/4$.
- *Za* $0 \leq t \leq 1$ *je* $\{D \leq t\}$ *dogodek, da je število na intervalu* $[-t, 1 + t]$. *Torej je* $F_D(t) = (1 + 2t)/4$.
- *Za* $1 \leq t \leq 2$ *je* $\{D \leq t\}$ *dogodek, da je število na intervalu* $[-t, 2]$. *Torej je* $F_D(t) = (2 + t)/4$.
- *Za* $t \geq 2$ *je dogodek* $\{D \leq t\}$ *gotov, torej je* $F_D(t) = 1$.

Graf:



b. (5) Je D porazdeljena diskretno? Je D porazdeljena zvezno?

Rešitev: Ker je $\sum_{t \in \mathbb{R}} P(D = t) = 1/4 < 1$, D *ni porazdeljena diskretno. Ker je* $P(D = 0) = 1/4 > 0$, D *ni porazdeljena zvezno.*

c. (5) Recimo, da je $D < 1$. Kolikšna je pogojna verjetnost, da izbrana točka leži na intervalu $[0, 1]$?

Rešitev: Dogodek, da je $D < 1$, *se ujema z dogodkom, da je izbrano število na intervalu* $(-1, 2)$. *Iskana pogojna verjetnost je zato enaka* $1/3$.

3. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj bosta neodvisni z gostoto

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{1}{2x}}$$

za $x > 0$ in 0 sicer.

a. (10) Izračunajte porazdelitev spremenljivke

$$U = \frac{X}{X+Y} \,.$$

Rešitev: Zamislimo si preslikavo

$$(x, y) \stackrel{\Phi}{\mapsto} (\frac{x}{x+y}, y) \,,$$

ki $(0,\infty)^2$ *bijektivno in zvezno parcialno odvedljivo preslika na* $(0,1) \times (0,\infty)$. *Označimo* $(u, v) = \Phi(x, y)$. *Izračunamo*

$$(x, y) = (\frac{uv}{1-u}, v)$$

in

$$J_{\phi^{-1}}(u, v) = \frac{v}{(1-u)^2} \,.$$

Torej je

$$f_{U,V}(u, v) = f(\frac{uv}{1-u}) f(v) \frac{v}{(1-u)^2}$$

za $(u, v) \in (0,\infty)^2$. *Torej je*

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2\pi v^2 \sqrt{u^3(1-u)}} e^{-\frac{1}{2uv}} \,.$$

Izračunamo

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_0^\infty f_{U,V}(u, v)\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{u^3(1-u)}} \int_0^\infty \frac{1}{v^2} e^{-\frac{1}{2uv}}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{u^3(1-u)}} \int_0^\infty u\; e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{u(1-u)}} \,. \end{aligned}$$

b. (10) Pokažite, da sta spremenljivki $X/(X+Y)$ in $1/X+1/Y$ neodvisni.

Rešitev: Oglejmo si preslikavo

$$(x,y) \overset{\phi}{\mapsto} \left(\frac{x}{x+y}, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Ta preslikava prenese $(0,\infty)^2$ *bijektivno in zvezno parcialno odvedljivo na* $(0,1)\times(0,\infty)$*. Označimo spet* $(u,v)=\Phi(x,y)$ *in izračunamo*

$$(x,y)=\left(\frac{1}{v(1-u)}, \frac{1}{uv}\right).$$

Izračunamo še

$$J_{\Phi^{-1}}(u,v) = -\frac{1}{v^3u^2(1-u)^2}.$$

Sledi

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{u(1-u)}}\, e^{-v/2}.$$

Gostota je produkt gostot (na $(0,1)\times(0,\infty)$*!), torej spremenljivki sta neodvisni.*

4. (20) V prvi posodi je n rdečih kroglic, v drugi posodi pa n modrih kroglic. Na vsakem koraku iz vsake posode neodvisno izberemo po eno kroglico, tako da so izbire neodvisne tudi od prejšnjih izbir. Kroglici nato zamenjamo, tako da imamo v vsaki posodi spet n kroglic. Označite z X_k število rdečih kroglic v prvi posodi tik po k-ti zamenjavi.[1]

a. (10) Označite $p(k,l) = P(X_k = l)$ za $k \geq 1$ in $l = 0, 1, 2, \ldots, n$. Pokažite, da velja

$$p(k+1,l) = p(k,l+1) \cdot \frac{(l+1)^2}{n^2} + p(k,l) \cdot \frac{2l(n-l)}{n^2} + p(k,l-1) \cdot \frac{(n-l+1)^2}{n^2}\,.$$

Pri tem razumemo, da je $p(k,l) = 0$ za $l < 0$ in $l > n$.

Rešitev: Recimo, da je po k-ti zamenjavi v prvi posodi j rdečih kroglic. Pri naslednji zamenjavi lahko pride do naslednjih štirih možnosti:

- *Iz obeh posod izvlečemo rdečo kroglico. To se zgodi z verjetnostjo* $\frac{j(n-j)}{n^2}$ *in potem je* $X_{k+1} = j$.
- *Iz obeh posod izvlečemo modro kroglico. To se spet zgodi z verjetnostjo* $\frac{j(n-j)}{n^2}$ *in potem je* $X_{k+1} = j$.
- *Iz prve posode izvlečemo rdečo, iz druge pa modro kroglico. To se zgodi z verjetnostjo* $\frac{j^2}{n^2}$ *in potem je* $X_{k+1} = j-1$.
- *Iz prve posode izvlečemo modro, iz druge pa rdečo kroglico. To se zgodi z verjetnostjo* $\frac{(n-j)^2}{n^2}$ *in potem je* $X_{k+1} = j+1$.

Torej za $j = 0, 1, \ldots, n$ *velja*

$$P(X_{k+1} = j+1 | X_k = j) = \frac{(n-j)^2}{n^2}\,, \quad P(X_{k+1} = j | X_k = j) = 2\,\frac{j(n-j)}{n^2}$$

in

$$P(X_{k+1} = j-1 | X_k = j) = \frac{j^2}{n^2}\,.$$

Iskano zvezo med $p(k,l)$ *dobimo po formuli za popolno verjetnost.*

b. (5) Za vsako fiksno rdečo kroglico je verjetnost, da se bo po k-ti zamenjavi znašla v prvi posodi, enaka; označimo jo s p_k. Dokažite, da je

$$p_k = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right]\,.$$

[1] Ta "difuzijski model" je opisal Daniel Bernoulli leta 1769.

Rešitev:

Prvi način: *z indukcijo. Očitno je $p_0 = 1$, kar se ujema s formulo. Nadalje, če je bila dana kroglica po $k-1$ izbiranjih v prvi posodi, je pogojna verjetnost, da v prvi posodi tudi po k-tem izbiranju, enaka $1 - 1/n$. Če pa je bila po $k-1$ izbiranjih v drugi posodi, je pogojna verjetnost , da v prvi posodi tudi po k-tem izbiranju, enaka $1/n$. Po formuli za polno verjetnost je*

$$p_k = \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_{n-1} + \frac{1}{n}\left(1 - p_{n-1}\right) = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{2}{n}\right) p_{k-1}\,.$$

Uporabimo indukcijsko predpostavko in dobimo

$$p_k = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left[1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k}\right],$$

tako kot zahtevano.

Drugi način. *Posamezna rdeča kroglica se po določenem številu zamenjav znajde v prvi posodi natanko tedaj, ko je bila izbrana sodo mnogokrat. Na vsakem koraku pa je verjetnost, da bo "dotična" kroglica izbrana (ne glede na to, v kateri posodi trenutno je), enaka $1/n$ in ti dogodki so med seboj neodvisni. Iskana verjetnost je torej enaka*

$$p_k = \sum_{\substack{m \le k \\ m \text{ sod}}} \binom{k}{m} \left(\frac{1}{n}\right)^m \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-m}.$$

Upoštevajoč, da je

$$\frac{1}{2}\left((x+y)^k + (-x+y)^k\right) = \sum_{\substack{m \le k \\ m \text{ sod}}} \binom{k}{m} x^m\, y^{k-m},$$

dobimo

$$p_k = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right)^k + \left(-\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right)^k\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right],$$

tako kot zahtevano.

c. (5) Izračunajte $E(X_k)$.

Rešitev: Pišimo $X_k = \sum_{l=1}^n I_{kl}$, kjer je

$$I_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{kroglica } l \text{ je po } k \text{ zamenjavah v prvi posodi} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ker je $E(I_{kl}) = p_k$, *je iskana pričakovana vrednost enaka*

$$E(X_k) = np_k = \frac{n}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right] .$$

5. (20) Naj bodo $I_1, I_2, \ldots$ med sabo neodvisne indikatorske slučajne spremenljivke z

$$I_k \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{k}\right) .$$

Naj bo N od njih neodvisna nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka z

$$P\left(N = n\right) = \frac{1}{2^{n+1}} .$$

Definirajte

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_N .$$

a. (10) Za $n \geq 0$ izračunajte

$$E\left(s^X | N = n\right) .$$

Rešitev: Zaradi predpostavk bo za $n \geq 1$ veljalo

$$\begin{aligned} E\left(s^X | N = n\right) &= E\left(s^{1+I_2+\cdots+I_N} | N = n\right) \\ &= E\left(s^{1+I_2+\cdots+I_n} | N = n\right) \\ &= E\left(s^{1+I_2+\cdots+I_n}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} E\left(s^{I_k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{k} + \frac{s}{k}\right) \\ &= \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!} . \end{aligned}$$

Po definiciji velja še

$$E\left(s^X | N = 0\right) = 1 .$$

b. (10) Izračunajte porazdelitev X.

Namig: Pri računanju upoštevajte

$$\frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!} = (-1)^n \binom{-s}{n}$$

in se spomnite na Newtonovo formulo za razvoj potence v Taylorjevo vrsto.

Rešitev: Iz prvega dela sledi, da je

$$G_X(s) = P(N=0) + \sum_{n=1}^{\infty} E\left(s^X | N=n\right) P(N=n)\,.$$

Če razumemo $\binom{-s}{0} = 1$ *in* $\binom{-s}{1} = -s$, *sledi*

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-s}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-s} \\ &= 2^{s-1} \\ &= e^{-\log(2)\cdot(1-s)} \end{aligned}$$

Sledi $X \sim \mathrm{Po}(\log 2)$.

6. (20) V igralnici Perla v Novi Gorici je gost Gregoroni pred kratkim priigral 144.000 €. Iz razpoložljivih podatkov je bilo razvidno, da je vztrajno igral na isti način. Vedno je stavil skupno 500 €. Od tega je stavil vedno 200 € na “polno” na številko 17, 300 € pa na “konja” iz številk 16 in 17. Pri igri na “polno” vam pri dobljeni igri, torej če se kroglica ustavi na 17, vrnejo stavo in izplačajo 35-krat toliko, sicer pa stavo izgubite. Pri konju vam pri dobljeni igri, torej če pride 16 ali 17, vrnejo stavo in izplačajo 17-krat toliko, sicer stavo izgubite.

Na ruleti je 37 številk, ki se pojavijo z enako verjetnostjo, posamezne igre pa so med sabo neodvisne.

a. (10) Označite z X čisti dobitek gosta v eni igri z zgoraj opisanimi stavami. Ugotovite, kakšne vrednosti lahko ima X s kakšnimi verjetnostmi in izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: Možne vrednosti za X so -500, če ne prideta številki 16 ali 17, 4.900, *če pride 16 in* 12.100, *če pride 17. Pripadajoče verjetnosti so* $35/37$, $1/37$ *in* $1/37$. *Računamo*

$$E(X) = -\frac{35 \cdot 500}{37} + \frac{4.900}{37} + \frac{12.100}{37} = -\frac{500}{37}, .$$

Računamo

$$E(X^2) = \frac{35 \cdot 500^2}{37} + \frac{4.900^2}{37} + \frac{12.100^2}{37} = \frac{179170000}{37} .$$

Sledi

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{6629040000}{1369} \approx (2200,51)^2 .$$

b. (10) Gost Gregoroni je svoj dobitek priigral v 582 igrah. Izračunajte približno verjetnost dobitka enakega ali večjega kot ga je s svojo igro priigral gost Gregoroni, za število iger enako $n = 582$. Upoštevajte, da je $\Phi(2,86) = 0,998$.

Rešitev: Uporabimo centralni limitni izrek. Iz a. dela naloge razberemo, da je $\mu = -13,51$ *in* $\sigma = 2.200,51$. *V formuli bo* $n = 582$. *Računamo*

$$\begin{aligned} P\left(S_{582} \geq 144.000\right) &= P\left(\frac{S_{582} - 582\mu}{\sqrt{582}\sigma} \geq \frac{144.000 - 582\mu}{\sqrt{582}\sigma}\right) \\ &\approx P\left(Z \geq 2,86\right) \\ &= 0,002 . \end{aligned}$$