Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

11. september 2015

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Butalci oni dan najdejo $n \geq 2$ zakladov in jih skrijejo v n skrivališč – v vsako skrivališče po en zaklad. Podnevi si svoje zaklade ogledujejo, ponoči pa spijo. Tepanjčani vsako noč iščejo zaklade ter vsak še neodkrit zaklad najdejo in ukradejo z verjetnostjo p. Privzamemo, da so vsa odkritja neodvisna tako med dnevi kot tudi med skrivališči.

a. (10) Označimo z A_i dogodek, da so imeli Butalci i-ti dan po odkritju v rokah še natanko en zaklad. Izračunajte $P(A_i)$.

Rešitev: Vsak zaklad je i-ti dan po odkritju še na mestu z verjetnostjo $(1-p)^i$ in ukraden z verjetnostjo $1-(1-p)^i$. Torej je $P(A_i) = n(1-p)^i\big(1-(1-p)^i\big)^{n-1}$.

b. (10) Za poljubna $i, j \in \mathbb{N}$ izračunajte $P(A_i \cap A_j)$.

Rešitev: Ločimo tri primere. Če je $i = j$, je seveda

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) = n(1-p)^i\big(1-(1-p)^i\big)^{n-1}.$$

Naj bo zdaj $i < j$. Če je posamezen zaklad i-ti dan še na mestu, je tudi j-ti dan še na mestu s pogojno verjetnostjo $(1-p)^{j-i}$. Torej je $P(A_j | A_i) = (1-p)^{j-i}$ in posledično

$$P(A_i \cap A_j) = n(1-p)^j\big(1-(1-p)^i\big)^{n-1}.$$

Pri $i > j$ pa se vlogi zamenjata in je

$$P(A_i \cap A_j) = n(1-p)^i\big(1-(1-p)^j\big)^{n-1}.$$

Vse tri primere lahko združimo v enotno formulo

$$P(A_i \cap A_j) = n(1-p)^{\max\{i,j\}}\big(1-(1-p)^{\min\{i,j\}}\big)^{n-1}.$$

2. (20) Kovanec mečemo, dokler ne dobimo ali m grbov ali m številk, kjer je $m > 1$ dano celo število. Označite z X število potrebnih metov. Privzemamo, da so meti med sabo neodvisni in je verjetnost za grb enaka verjetnosti za številko, torej $1/2$.

a. (10) Izračunajte $P(X = k)$ za vse $k = m, m+1, \ldots, 2m-1$.

Rešitev: Dogodek $\{X = k\}$ se lahko zgodi na dva disjunktna načina: ali v k-tem metu prvič dobimo natanko m grbov, ali dobimo prvič natanko m številk. Z uporabo negativne binomske porazdelitve ugotovimo, da sta verjetnosti za ta dva disjunktna načina enaki

$$\binom{k-1}{m-1} (1/2)^m (1/2)^{k-m} .$$

Sledi

$$P(X = k) = \binom{k-1}{m-1} (1/2)^{k-1} .$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

Namig: Upoštevajte, da je

$$\sum_{k=m}^{2m-1} P(X = k) = 1$$

za vsak m, torej tudi za $m+1$. Preverite, da je

$$k \binom{k-1}{m-1} = m \binom{k}{m} .$$

Rešitev: Po definiciji je

$$E(X) = \sum_{k=1}^{2m-1} k \binom{k-1}{m-1} (1/2)^{k-1} .$$

Prepišemo

$$k \binom{k-1}{m-1} = m \binom{k}{m} .$$

Računamo

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{2m-1} k \binom{k-1}{m-1} (1/2)^{k-1} \\ &= m \sum_{k=m}^{2m-1} \binom{k}{m} (1/2)^{k-1} \\ &= m \sum_{l=m+1}^{2m} \binom{l-1}{(m+1)-1} (1/2)^{l-2} \\ &= 2m \sum_{l=m+1}^{2(m+1)-2} \binom{l-1}{(m+1)-1} (1/2)^{l-1}. \end{aligned}$$

Vsota zelo spominja na vsoto $\sum_{k=m}^{2m-1} P(X=k) = 1$ *za* $m+1$ *namesto* m*, le zadnji člen za* $l = 2(m+1)-1$ *manjka. Sledi*

$$E(X) = 2m\left(1 - \binom{2m}{m} (1/2)^{2m}\right).$$

3. (20) V posodi imamo b belih kroglic oštevilčenih s števili $1, 2, \ldots, b$ in r rdečih kroglic oštevilčenih s števili $1, 2, \ldots, r$. Označimo $n = b + r$. Kroglice iz posode izbiramo po vrsti, naključno in brez vračanja. Naj bo X število na prvi beli kroglici, ki jo izberemo, Y pa število na prvi rdeči kroglici, ki jo izberemo.

a. (10) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni. Kakšni sta porazdelitvi X in Y?

   Rešitev: Ponovno branje besedila pokaže, da dobimo X tako, da si naključno izbereno stevilo me 1 in b, Y pa tako, da si naključno izberemo število med 1 in r. Slučajni spremenljivki sta neodvisni. Yaradi simetrije sta obe porazdelitvi enakomerni.

b. (10) Spremenimo besedilo tako, da kroglice izbiramo tako dolgo, da dobimo ali zapovrstjo belo in rdečo kroglico ali zapovrstjo rdečo in belo kroglico. Naj bo X število na beli, Y pa število na rdeči kroglici. Sta X in Y neodvisni?

   Rešitev: Velja enak razmislek kot v a. Števila na kroglicah so neodvisna.

4. (20) V posodi je M rdečih in $N-M$ belih kroglic. Kroglice začnemo izbirati po vrsti brez vračanja, dokler ne izberemo vseh. Definirajmo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta kroglica rdeča} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

a. (10) Za $n \leq N$ definirajte $S_n = I_1 + \cdots + I_n$. Izračunajte

$$E(S_m|S_n = a)$$

za $1 \leq m \leq n \leq N$.

Rešitev: Najprej uporabimo linearnost in opazimo, da je

$$E(S_m|S_n) = E(I_1|S_n) + \cdots + E(I_m|S_n)\,.$$

Zaradi simetrije so seveda vsa pogojna upanja v vsoti na desni enaka. Ker je tudi

$$E(S_n|S_n = a) = S_n\,,$$

dobimo, da je $E(I_k|S_n = a) = a/n$ za $k \leq n$. Sledi

$$E(S_m|S_n) = \frac{ma}{n}\,.$$

b. (10) Izračunajte še $E(S_n|I_1 = 1)$.

Rešitev: Če je prva kroglica rdeča, potem v žari ostane $M-1$ rdečih in $N-m$ belih, vsota S_n pa se bo obnašala kot $1 + S_{n-1}$ v primeru, ko začnemo z $M-1$ rdečimi in $N-m$ belimi kroglicami. Pogojna porazdelitev je hipergeometrijska, zato je

$$E(S_n|I_1 = 1) = 1 + (n-1)\frac{M-1}{N-1}\,.$$

5. (20) Naj bo $m > 0$ celo število. Naj bo $p \in (0,1)$ in naj velja $q = 1 - p$. Za proces razvejanja $Z_0, Z_1, \ldots$ naj velja

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = \left(\frac{1}{2 - s^m}\right)^{1/m} .$$

a. (10) Izračunajte $E(Z_2)$.

Rešitev: Vemo, da je

$$\begin{aligned}
G_2(s) &= G(G(s)) \\
&= \left(\frac{1}{2 - G(s)^m}\right)^{1/m} \\
&= \left(\frac{1}{2 - \left(\left(\frac{1}{2-s^m}\right)^{1/m}\right)^m}\right)^{1/m} \\
&= \left(\frac{1}{2 - \frac{1}{2-s^m}}\right)^{1/m} \\
&= \left(\frac{2 - s^m}{3 - 2s^m}\right)^{1/m} .
\end{aligned}$$

Odvajamo in dobimo

$$G_2'(s) = \frac{1}{m}\left(\frac{2 - s^m}{3 - 2s^m}\right)^{\frac{1}{m}-1} \frac{-ms^{m-1}(3 - 2s^m) + 2ms^m(2 - s^m)}{(3 - 2s^m)^2} .$$

Vstavimo $s = 1$ *in dobimo*

$$\begin{aligned}
E(Z_2) &= G_2'(1) \\
&= \frac{1}{m} \cdot \frac{-m + 2m^2}{(2 - 1)} \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je

$$G_n(s) = \left(\frac{n - (n-1)s^m}{n + 1 - ns^m}\right)^{1/m}$$

in izračunajte $P(Z_n = 0)$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Rešitev: Formula za G_n velja za $n = 1$. Predpostavimo, da formula velja za n in naredimo indukcijski korak.

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= G_n(G(s)) \\ &= \left(\frac{n-(n-1)G(s)^m}{n+1-nG(s)^m}\right)^{1/m} \\ &= \left(\frac{n-\frac{n-1}{2-s^m}}{n+1-\frac{n}{2-s^m}}\right)^{1/m} \\ &= \left(\frac{2n-ns^m-(n-1)}{(n+1)(2-s^m)-n}\right)^{1/m} \\ &= \left(\frac{n+1-ns^m}{n+2-(n+1)s^m}\right)^{1/m}. \end{aligned}$$

S tem je indukcijski korak zaključen. Vemo, da je $P(Z_n = 0) = G_n(0)$. Sledi

$$P(Z_n = 0) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/m}.$$

6. (20) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi 1 EUR na rdeče, drugi pa vedno stavi 1 EUR na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega 1 EUR, za drugega pa 35 EUR, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo.

a. (10) Izračunajte približek verjetnosti, da drugi igralec po 1000 igrah nima izgube.

Rešitev: Dobiček drugega igralca po 1000 *igrah je kot vsota* 1000 *med sabo neodvisnih slučajnih spremenljivk z matematičnim upanjem* $\mu = -1/37$ *in varianco* $\sigma^2 = 36^2 \cdot (1/37)(1-1/37)$. *Označimo dobiček po* 1000 *igrah s* S_{1000}. *Po centralnem limitnem izreku lahko verjetnost aproksimiramo s*

$$\begin{aligned} P(S_{1000} \geq 0) &= P(\frac{S_{1000} - \mu \cdot 1000}{\sqrt{1000} \cdot \sigma} \geq -\frac{\mu\sqrt{1000}}{\sigma}) \\ &\approx P(Z \geq 0,15) \\ &= 0,44\,. \end{aligned}$$

b. (10) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n - X_n > 0)\,.$$

Utemeljite vaš razmislek.

Namigi: Napišite $Y_n - X_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$, *kjer je* U_k *čisti profit prvega igralca v* k*-ti igri in* V_k *čisti profit drugega igralca v isti igri. Slučajne spremenljivke* $U_k - V_k$ *so med sabo neodvisne z enako porazdelitvijo in* $\mathrm{var}(U_k - V_k) = 1368/37$.

Rešitev: Najprej opazimo, da je $E(U_k) = E(V_k) = -1/37$, *zato je* $E(U_k - V_k) = 0$. *Označimo* $\sigma^2 = \mathrm{var}(U_k - V_k)$. *Označimo* $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$. *Centralni limitni izrek pravi*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma} \geq 0) = P(Z \geq 0)\,.$$

Opazimo

$$P(\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma} \geq 0) = P(S_n \geq 0) = P(Y_n > X_n)\,.$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n) = \frac{1}{2}\,.$$