Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

13. junij 2018

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V Las Vegasu je zelo popularna igra *Craps.* Igra ima dva koraka: najprej igralec vrže dve kocki. Če je vsota pik na kockah 7 ali 11, je igralec zmagal. Če je vsota 2, 3 ali 12, je igralec izgubil. Če vsota ni nobeno od zgornjih števil, postane ta vsota igralčeva "magična številka". Igralec nato nadaljuje z metanjem dveh kock. Če se pri metanju prej pojavi 7 kot magična številka, igralec izgubi. Če se prej pojavi magična številka, igralec zmaga.

a. (10) Označimo z H_k dogodek, da v prvem metu dveh kock igralec dobi vsoto k, z A pa dogodek, da igralec na koncu zmaga. Kot znano privzemite, da je

$$P(A|H_k) = \frac{6P(H_k)}{1+6P(H_k)}$$

za $k \notin \{2,3,7,11,12\}$. Izračunajte $P(A)$.

Namig: Uporabite simetrijo, da se izognete prekomernemu seštevanju ulomkov.

Rešitev: Iz besedila naloge razberemo, da je $P(A|H_k) = 0$ za $k \in \{2,3,12\}$ in $P(A|H_k) = 1$ za $k \in \{7,11\}$. Po formuli za popolno verjetnost je tako

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=2}^{12} P(A|H_k)P(H_k) \\
&= \sum_{k\in\{7,11\}} P(H_k) + \sum_{k\in\{4,5,6,8,9,10\}} P(A|H_k)P(H_k) \\
&= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + 2\cdot\left(\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{36} + \frac{4}{10}\cdot\frac{4}{36} + \frac{5}{11}\cdot\frac{5}{36}\right) \\
&= \frac{8}{36} + 2\cdot\frac{110+176+250}{3960} \\
&= \frac{880+1072}{3960} \\
&= \frac{1952}{3960}\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Recimo, da je igralec zmagal. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je na prvem metu dveh kock padla soda vsota?

Rešitev: Naloga sprašuje po

$$P(H_2 \cup H_4 \cup H_6 \cup H_8 \cup H_{10} \cup H_{12}|A)\,.$$

Računamo po definiciji

$$\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^{6}(H_{2k}\cap A)) &= \sum_{i=1}^{6} P(A\cap H_{2k}) \\
&= \sum_{i=1}^{6} P(A|H_{2k})P(H_{2k}) \\
&= \frac{3}{9}P(H_4)+\frac{5}{11}P(H_6)+\frac{5}{11}P(H_8)+\frac{3}{9}P(H_{10}) \\
&= \frac{3}{9}\cdot\frac{3}{36}+\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{36}+\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{36}+\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{36} \\
&= \frac{99+175+175+99}{3564} \\
&= \frac{548}{3534}\,.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned}
P(H_2\cup H_4\cup H_6\cup H_8\cup H_{10}\cup H_{12}|A) &= \frac{548}{3534}\cdot\frac{3960}{1952} \\
&= \frac{137}{589}\cdot\frac{660}{488} \\
&= \frac{137}{589}\cdot\frac{165}{122}\,.
\end{aligned}$$

2. (20) Pri *Poker testu* za kontrolo generatorjev slučajnih števil nastopi naslednji problem: imamo neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ z enakomerno porazdelitvijo na množici $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ za nek $m > 0$. Naj bo X število različnih števil v množici $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$. Primer: če je množica $\{1, 2, 5, 2, 5\}$, so med števili tri različna.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Za $k = 0, 1, \ldots, m-1$ definirajmo indikatorje

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če se število } k \textit{ pojavi v množici } \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Zapišemo lahko $X = I_0 + \cdots + I_{m-1}$. Zaradi enakomerne porazdelitve imajo vsi indikatorji enako porazdelitev. Računamo

$$P(I_k = 1) = 1 - \left(\frac{m-1}{m}\right)^5 .$$

Sledi

$$E(X) = m\left(1 - \left(\frac{m-1}{m}\right)^5\right) .$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Namig: Utemeljite, da je

$$\begin{aligned} P(I_k = 1, I_l = 1) &= 1 - P\left(\{I_k = 0\} \cup \{I_l = 0\}\right) \\ &= 1 - P(I_k = 0) - P(I_l = 0) + P(I_k = 0, I_l = 0) . \end{aligned}$$

Rešitev: Računamo

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{var}(I_k) + \sum_{\substack{0 \le k,l < m \\ k \neq l}} \mathrm{cov}(I_k, I_l) .$$

Zaradi simetrije so enake vse variance in vse kovariance. Vemo, da je

$$\mathrm{var}(I_k) = P(I_k = 1)\,(1 - P(I_k = 0))$$

in

$$\mathrm{cov}(I_k, I_l) = P(I_k = 1, I_l = 1) - P(I_k = 1)P(I_l = 1) .$$

Prepišemo

$$\begin{aligned} P(I_k = 1, I_l = 1) &= 1 - P\left(\{I_k = 0\} \cup \{I_l = 0\}\right) \\ &= 1 - P(I_k = 0) - P(I_l = 0) + P(I_k = 0, I_l = 0)\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$P(I_k = 1, I_l = 1) = 1 - 2\left(1 - \left(\frac{m-1}{m}\right)^5\right) + 1 - \left(\frac{m-2}{m}\right)^5 .$$

Poenostavimo v

$$P(I_k = 1, I_l = 1) = 2\left(\frac{m-1}{m}\right)^5 - \left(\frac{m-2}{m}\right)^5 .$$

3. (20) Predpostavite, da sta slučajni spremenljivki U in Z neodvisni z $U \sim \exp(1)$ in $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Kot znano privzemite, da je za $a > 0$ in $b \geq 0$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-au-\frac{b}{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}\,.$$

Definirajte $X = \sqrt{2U}Z$.

a. (10) Dokažite, da je gostota slučajne spremenljivke X enaka

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}\,.$$

Rešitev: Definirajmo preslikavo

$$\Phi(u,z) = \left(u, \sqrt{2u}z\right)\,.$$

Preslikava bijektivno preslika $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ *nase in je ustrezno zvezno parcialno odvedljiva. Računamo*

$$\Phi^{-1}(u,x) = \left(u, \frac{x}{\sqrt{2u}}\right)$$

in posledično

$$J_{\Phi^{-1}}(u,x) = \frac{1}{\sqrt{2u}}\,.$$

za $u > 0$ *in* $x \in \mathbb{R}$. *Sledi*

$$f_{U,X}(u,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u} e^{-\frac{x^2}{4u}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2u}}\,.$$

Gostoto X *izračunamo kot robno gostoto. Iz znanega integrala preberemo, da je*

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}\,.$$

b. (10) Naj bosta X in Y neodvisni in enako porazdeljeni. Izračunajte gostoto vsote $S = X + Y$.

Namig: Računajte po formuli

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^\infty f_X(x) f_Y(s-x)\,dx\,.$$

Rešitev: Računamo lahko po formuli

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(s-x)dx\,.$$

Zaradi simetrije bo $f_S(s) = f_S(-s)$. *Predpostavimo* $s \geq 0$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(s-x)dx \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-|x-s|}dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{2x-s}dx + \int_{0}^{s} e^{-s}dx + \int_{s}^{\infty} e^{-2x+s}dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{-s} + se^{-s} + \frac{1}{2}e^{-s}\right) \\
&= \frac{1}{4}(1+s)e^{-s}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$f_S(s) = \frac{1}{4}(1+|s|)e^{-|s|}\,.$$

4. (20) Vzporedno mečemo dve pošteni kocki, eno črno in eno rdečo. Meti so neodvisni in tudi izida na vsaki kocki pri posameznem metu sta neodvisna. Kocki mečemo, dokler se na črni kocki ne pojavi šestica. Naj bo N število metov do vključno šestice na črni kocki, slučajna spremenljivka X pa naj bo največje padlo število pik na rdeči kocki do trenutka N.

a. (10) Izračunajte $P(X = k|N = n)$.

Namig: izračunajte $P(X \leq k|N = n)$ *in upoštevajte, da je*

$$P(X = k|N = n) = P(X \leq k|N = n) - P(X \leq k - 1|N = n)\,.$$

Rešitev: Za $n \geq 1$ *in* $k = 1, 2, \ldots, 6$ *računamo*

$$P(X \leq k|N = n) = \left(\frac{k}{6}\right)^n\,.$$

To sledi iz tega, da smo v primeru, ko vemo, da je $N = n$*, rdečo kocko vrgli* n*-krat. Če naj bo* $X \leq k$*, mora na vsakem metu pasti* k *ali manj. Verjetnost na enem metu je* $k/6$*, na* n *neodvisnih metih pa* $(k/6)^n$*. Sledi*

$$P(X = k|N = n) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\,.$$

b. (10) Izračunajte $E(N|X = k)$. Kot znano upoštevajte, da za $|a| < 1$ velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}\,.$$

Rešitev: Ker je $N \sim \mathrm{Geom}(1/6)$*, je za* $n = 1, 2, \ldots$

$$P(N = n) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\,.$$

Ker je $P(N = n, X = k) = P(X = k|N = n)P(N = n)$*, dobimo*

$$P(N = n, X = k) = \left(\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\,.$$

Po drugi strani je

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=k|N=n)P(N=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &= \frac{k}{36-5k} - \frac{k-1}{36-5(k-1)} . \end{aligned}$$

Po definiciji je

$$E(N|X=k) = \frac{1}{P(X=k)} \sum_{n=1}^{\infty} nP(N=n, X=k) .$$

Vstavimo in sledi

$$E(N|X=k) = \frac{1}{P(X=k)} \cdot \left(\frac{36k}{(36-5k)^2} - \frac{36(k-1)}{(36-5(k-1))^2}\right) .$$

5. (20) V vreči imamo 5 različnih kroglic, pri čemer je vsaka izmed njih oštevilčena z eno izmed številk 2, 4, 6, 8, 10. Kroglice so sicer enake na otip. Iz vreče 6 krat na slepo izvlečemo kroglico, ki jo takoj vrnemo v vrečo. Naj bo X vsota šestih izvlečenih števil.

a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Naj bo X_i i-to izvlečeno število. Zaradi neodvisnosti in enake porazdeljenosti spremenljivk $X_1, \ldots, X_6$ velja

$$G_X(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_6}(s) = (G_{X_1}(s))^6 .$$

Vstavimo in dobimo

$$G_X(s) = (\frac{1}{5}s^2 + \frac{1}{5}s^4 + \frac{1}{5}s^6 + \frac{1}{5}s^8 + \frac{1}{5}s^{10})^6 = \frac{1}{5^6}s^{12}(s^0 + s^2 + s^4 + s^6 + s^8)^6 .$$

b. (10) Izračunajte $P(X = 24)$.

Rešitev: Ker je $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k$, je iskana verjetnost enaka koeficientu pri členu s^{24}. Iz točke (a) sledi, da moramo poiskati koeficient pred členom s^{12} v izrazu $(s^0 + s^2 + s^4 + s^6 + s^8)^6$. Poiskati moramo torej število rešitev enačbe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 12,$$

pri čemer velja $a_i \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ za vsak i. Če bi veljalo $a_i \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, potem bi iskano število rešitev bilo enako številu nizov iz 6 znakov 2 in 5 znakov + (rešitvi 4+4+0+2+2+0=12 bi npr. priredili niz 22+22++2+2+). Slednjih je $\binom{11}{5}$. Ker sta števili 10 in 12 prepovedani, moramo od števila $\binom{11}{5}$ odšteti število rešitev, kjer se pojavi 12 oz. 10. Število 12 se pojavi skupaj s petimi ničlami. Takih rešitev je 6. Število 10 se pojavi z eno dvojko in štirimi ničlami. Takih rešitev je $2\binom{6}{4}$. Koeficient pred členom s^{12} v izrazu $(s^0 + s^2 + s^4 + s^6 + s^8)^6$ je torej enak $\binom{11}{5} - 6 - 2\binom{6}{4} = 426$. Iskana verjetnost zato znaša

$$P(X = 24) = \frac{426}{5^6} \doteq 0.027.$$

6. (20) Igralni avtomati imajo 3 kolesa s po 7 simboli. Ko potegnemo ročico, se kolesa ustavijo neodvisno eno od drugega, simboli na posameznih kolesih pa so enako verjetni. Stavimo vedno 1 enoto. Če se ujemajo vsi trije simboli, nam igralni avtomat vrne stavo in še 4 enote. Če se ujemata samo dva simbola, nam avtomat vrne stavo in še eno enoto. V vseh ostalih primerih stavo izgubimo.

a. (10) Naj bo X_1 čisti dobiček v eni igri, ki je lahko 4 enote, 1 enoto ali -1 enoto. Izračunajte $E(X_1)$ in $\mathrm{var}(X_1)$.

Rešitev: Naj bo X_1 čisti dobiček v prvi igri. Iz besedila razberemo, da je

$$P(X_1 = 4) = 1/49, \quad P(X_1 = 1) = \frac{18}{49} \quad \textit{in} \quad P(X_1 = -1) = \frac{30}{49}\,.$$

Sledi

$$E(X_1) = -\frac{8}{49} = -0,1633 \qquad \textit{in} \qquad \mathrm{var}(X_1) = \frac{64}{49} - \frac{64}{49^2} = 1,2795\,.$$

b. (10) Izračunajte približno verjetnost, da bo po $n = 1000$ igrah izguba 150 enot ali manj. Privzemite, da imamo dovolj enot, da le teh med igro ne zmanjka.

Rešitev: Označimo $S_{1000} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}$. Po centralnem limitnem izreku velja

$$\begin{aligned} P(S_{1000} \geq -150) &= P\left(\frac{S_{1000} - 1000 \cdot E(X_1)}{\sqrt{1000 \cdot \mathrm{var}(X_1)}} \geq \frac{-150 - 1000 \cdot E(X_1)}{\sqrt{1000 \cdot \mathrm{var}(X_1)}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 0,37) \\ &= 0.36\,. \end{aligned}$$