Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

14. junij 2016

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.					
2.			•	•	
3.			•	•	
4.					
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) S kupa 52 standardnih kart, v katerem so štirje asi, štirim igralcem razdelimo vsakemu po 13 kart. Karte so dobro premešane, tako da vsak posameznik dobi z enako verjetnostjo kateri koli nabor 13 kart. Označite

$$A_i = \{\text{igralec } i \text{ ima natanko enega asa}\}$$

za $i = 1, 2, 3, 4$. V izračunih vam izrazov z binomskimi simboli ni treba poenostavljati.

a. (5) Izračunajte $P(A_i)$.

Rešitev: Ena možnost je, da za izide vzamemo delitve kart. Vsak igralec dobi naključen izbor 13 kart. Takih izborov je $\binom{52}{13}$. Izborov z natanko enim asom je $4\binom{48}{12}$. Sledi

$$P(A_i) = \frac{4\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \doteq 0{,}439\,.$$

Druga možnost pa je, da za izide vzamemo razporeditve asov v kupu. Vseh možnih razporeditev je $\binom{52}{4}$, takšnih, kjer določen igralec dobi natanko enega asa, pa je $13 \cdot \binom{39}{3}$. Tako iskano verjetnost dobimo še v obliki

$$P(A_i) = \frac{13\binom{39}{3}}{\binom{52}{4}}\,.$$

b. (5) Izračunajte $P(A_i \cap A_j)$ za $i \neq j$.

Rešitev: Izračunajmo $P(A_i|A_j)$. Računamo verjetnosti, da bo igralec i iz kupa 39 kart, v katerem so trije asi, dobil nabor 13 kart z natanko enim asom. Ta verjetnost je enaka

$$P(A_i|A_j) = \frac{3\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}}\,.$$

Sledi

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_j)P(A_i|A_j) = \frac{4\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{3\binom{36}{12}}{\binom{39}{12}} \doteq 0{,}203\,.$$

Če pa za izide vzamemo razporeditve asov, dobimo verjetnost v obliki

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{13^2\binom{26}{2}}{\binom{52}{4}}\,.$$

c. (5) Izračunajte $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ za $i < j < k$.

Rešitev: Računamo na enak način kot v prejšnji točki po formuli

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_k)P(A_j|A_k)P(A_i|A_j \cap A_k)\,.$$

Sledi

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{4\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{3\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{2\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \doteq 0{,}105\,.$$

Če pa za izide vzamemo razporeditve asov, dobimo verjetnost v obliki

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{13^4}{\binom{52}{4}}\,.$$

d. (5) Izračunajte $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.

Rešitev: Opazimo, da je $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = A_i \cap A_j \cap A_k$. *Po formuli za vključitve in izključitve z upoštevanjem simetrije dobimo*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 3P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \doteq 0{,}855\,.$$

2. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne, enako porazdeljene celoštevilske slučajne spremenljivke s

$$P(X_1 = k) = \frac{1}{N}$$

za $k = 1, 2, \ldots, N$ za nek fiksen $N \geq 1$. Za vsak n lahko na množici $\{1, 2, \ldots, n\}$ definiramo slučajno ekvivalenčno relacijo s predpisom

$$i \sim j \quad \iff \quad X_i = X_j \, .$$

Označite z Y_n slučajno število ekvivalenčnih razredov, na katere razpade množica $\{1, 2, \ldots, n\}$. Z drugimi besedami je Y_n število različnih vrednosti med $X_1, \ldots, X_n$.

a. (10) Izračunajte $E(Y_n)$.

Rešitev: Definiramo $A_i = \{$med števili $X_1, \ldots, X_n$ se pojavi $i\}$. Izračunamo

$$P(A_i) = 1 - P(A_i^c) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n .$$

Očitno je

$$Y_n = \sum_{i=1}^{N} 1_{A_i} \, .$$

Sledi

$$E(Y_n) = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right) .$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(Y_n)$.

Rešitev: Za izračun variance potrebujemo verjetnost

$$\begin{aligned} P(A_i \cap A_j) &= 1 - P(A_i^c \cup A_j^c) \\ &= 1 - P(A_i^c) - P(A_j^c) + P(A_i^c \cap A_j^c) \\ &= 1 - 2\left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n . \end{aligned}$$

Sledi

$$\mathrm{cov}(1_{A_i}, 1_{A_j}) = \left(1 - 2\left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n\right) - \left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)^2 ,$$

torej

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Y_n) &= N\left(\frac{N-1}{N}\right)^n \left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right) + \\ &\quad + N(N-1)\Bigg(\left(1 - 2\left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n\right) \end{aligned}$$

3. (20) Slučajne spremenljivke T, T' in U naj bodo neodvisne z $T \sim \exp(1)$, $T' \sim \exp(1)$ in $U \sim U(0,1)$. Definirajte

$$X = \log\left(\frac{U}{1-U}\right) \qquad \text{in} \qquad Y = (2U-1)(T+T')\,.$$

Naj bo $G = \{(x,y)\colon xy > 0\}$. Definirajte preslikavo $\Phi\colon G \to (0,1)\times(0,\infty)$ s predpisom

$$\Phi(x,y) = \left(\frac{e^x}{e^x+1}, \frac{y(e^x+1)}{(e^x-1)}\right)\,.$$

a. (10) Izračunajte gostoto vektorja $\Phi(X,Y)$.

Rešitev: Preslikava Φ preslika G bijektivno in zvezno parcialno odvedljivo na območje $(0,1)\times(0,\infty)$. Opazimo tudi, da je

$$P((X,Y)\in G) = P\left(\left(\log\frac{T}{T'}, T-T'\right)\in G\right) = 1\,.$$

Računamo

$$\Phi(X,Y) = (U, T+T')\,.$$

Vemo, da sta U in $T+T'$ neodvisni in $T+T' \sim \Gamma(2,1)$. Sledi, da je

$$f_{X,Y}(x,y) = ye^{-y}$$

za $x\in(0,1)$ in $y\in(0,\infty)$.

b. (10) Pokažite, da imata vektorja

$$\Phi(X,Y) \qquad \text{in} \qquad \Phi\left(\log\frac{T}{T'}, T-T'\right)$$

enako porazdelitev.

Rešitev: Računamo

$$\Phi\left(\log\frac{T}{T'}, T-T'\right) = \left(\frac{T}{T+T'}, T+T'\right)\,.$$

Vemo, da je

$$\frac{T}{T+T'} \sim \text{Beta}(1,1) \qquad \textit{in} \qquad T+T' \sim \Gamma(2,1)\,,$$

poleg tega pa sta slučajni spremenljivki tudi neodvisni.

4. (20) S kupa 52 standardnih kart, v katerem so štirje asi, štirim igralcem razdelimo vsakemu po 13 kart. Karte so dobro premešane, tako da vsak posameznik dobi z enako verjetnostjo kateri koli nabor 13 kart. Označite z X_i število asov i-tega igralca za $i = 1, 2, 3, 4$.

a. (5) Izračunajte $E(X_i|X_j = k)$ za $i \neq j$ in $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Rešitev: Vemo, da je pogojna porazdelitev X_i glede na dogodek $\{X_j = k\}$ hipergeometrijska s parametri 13, $4 - k$ in 39. Sledi

$$E(X_i|X_j = k) = 13 \cdot \frac{4-k}{39}\,.$$

b. (5) Izračunajte $E(X_i^2|X_j = k)$ za $i \neq j$ in $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Rešitev: Če je $Y \sim \mathrm{HiperGeom}(n, B, N)$, je

$$E(Y^2) = \mathrm{var}(Y) + E(Y)^2 = n \cdot \frac{B(N-B)}{N^2} \cdot \frac{N-n}{N-1} + n^2 \cdot \frac{B^2}{N^2}\,.$$

Ker vemo, da je pogojna porazdelitev hipergeometrijska, je

$$E(X_i^2|X_j = k) = 13 \cdot \frac{(4-k)(35+k)}{39^2} \cdot \frac{26}{38} + 13^2 \cdot \frac{(4-k)^2}{39^2}\,.$$

c. (5) Izračunajte $E((X_1 + X_2)^2|X_3 = k)$.

Rešitev: V tem primeru je pogojna porazdelitev $X_1 + X_2$ glede na dogodek $\{X_3 = k\}$ enaka $\mathrm{HiperGeom}(26, 4-k, 39)$. Po istem kopitu dobimo

$$E((X_1 + X_2)^2|X_3 = k) = 26 \cdot \frac{(4-k)(35+k)}{39^2} \cdot \frac{13}{38} + 26^2 \cdot \frac{(4-k)^2}{39^2}\,.$$

d. (5) Izračunajte $E(X_1X_2|X_3 = k)$.

Rešitev: Zaradi linearnosti pogojne pričakovane vrednosti je

$$E((X_1 + X_2)^2|X_3 = k) = E(X_1^2|X_3 = k) + E(X_2^2|X_3 = k) + 2E(X_1X_2|X_3 = k)\,.$$

Zaradi simetrije sta prvi dve pogojni pričakovani vrednosti enaki. Ker razen iskane pogojne pričakovane vrednosti poznamo vse ostale, jo lahko izračunamo.

5. (20) V genetiki imamo naslednjo nalogo: na začetku imamo eno bakterijo. V trenutkih $n = 0, 1, \ldots$ se lahko zgodi dvoje: vse bakterije se razdelijo v dve z verjetnostjo p, ali pa se ne zgodi nič z verjetnostjo $q = 1-p$. Označimo z Z_n slučajno število bakterij v trenutku n. Z $G_n(s)$ označimo rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n. Velja $G_0(s) = s$ in

$$G_{n+1}(s) = qG_n(s) + pG_n(s^2)\,.$$

a. (10) Pokažite, da velja

$$E(Z_{n+1}) = (1+p)E(Z_n)$$

in izračunajte $E(Z_n)$.

Rešitev: Vemo, da je $E(Z_n) = G_n'(1)$. Odvajamo levo in desno stran rekurzivne formule in dobimo

$$G_{n+1}'(s) = qG_n'(s) + 2psG_n'(s^2)\,.$$

Vstavimo $s = 1$ in dobimo

$$E(Z_{n+1}) = qE(Z_n) + 2pE(Z_n) = (1+p)E(Z_n)\,.$$

Z indukcijo takoj ugotovimo, da je $E(Z_n) = (1+p)^n$.

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\, s^{2^k}\,.$$

Izračunajte $P(Z_n = k)$ za vse $k = 1, 2, \ldots$.

Namig: Po Pascalu je

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\,.$$

Rešitev: Podana formula velja za $n = 0$. Pa denimo, da formula drži za n.

Računamo

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \\
&= qG_n(s) + pG_n(s^2) \\
&= q\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\,s^{2^k} + p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\,(s^2)^{2^k} \\
&= q\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\,s^{2^k} + p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\,s^{2^{k+1}} \\
&= qq^ns + \sum_{k=1}^{n}\left(q\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\,s^{2^k} + p\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}s^{2^k}\right) + pp^ns^{2^{n+1}} \\
&= q^{n+1}s + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}p^kq^{n-k} + p^{n+1}s^{2^{n+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^kq^{n+1-k}s^{2^k}\,.
\end{aligned}$$

Razberemo lahko, da je $P(Z_n = 2^k) = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ *za* $k = 0, 1, \ldots, n$. *Za števila* m*, ki niso potence števila* 2*, je* $P(Z_n = m) = 0$.

6. (20) Denimo, da se cena določenega vrednostnega papirja v enem dnevu z verjetnostjo 30% dvigne za 1%, z verjetnostjo 30% pade za 1%, z verjetnostjo 40% pa ostane nespremenjena. Spremembe cen med zaporednimi dnevi so med seboj neodvisne.

a. (10) Utemeljite, da gre verjetnost, da je cena po n dneh večja od izhodiščne, proti nič, ko gre n proti neskončno.

Namig: cene primerno transformirajte.

Rešitev: Naj bodo $Q_1, Q_2, \ldots$ faktorji, ki predstavljajo spremembe cene v posameznih dneh. Velja:

$$Q_k \sim \begin{pmatrix} 0{,}99 & 1 & 1{,}01 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} .$$

Spremembo cene po n dneh predstavlja faktor $Q_1 Q_2 \cdots Q_n$. Logaritem tega faktorja je vsota logaritmov slučajnih spremenljivk Q_k. Ti logaritmi so neodvisni in imajo porazdelitev:

$$\ln Q_k \sim \begin{pmatrix} -0{,}010050336 & 0 & 0{,}009950331 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} .$$

Njihova pričakovana vrednost je enaka $\mu_1 \doteq -3{,}00015 \cdot 10^{-5}$, njihova varianca pa je enaka $\sigma_1^2 \doteq 6{,}00046 \cdot 10^{-5}$. Iz centralnega limitnega izreka sledi, da je verjetnost, da je cena po n dneh višja, za velike n enaka približno:

$$1 - \Phi\left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1}\sqrt{n}\right)$$

(kjer je σ_1 seveda pozitiven). Ker je μ_1 negativen, gre slednji izraz pa gre proti nič, ko gre n proti neskončno.

b. (5) Izračunajte število dni, po katerih je verjetnost, da bo cena višja, približno enaka 5%.

Rešitev: Če iskano število dni označimo z n, mora približno veljati:

$$1 - \Phi\left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1}\sqrt{n}\right) = 0{,}05$$

oziroma

$$-\frac{\mu_1}{\sigma_1}\sqrt{n} = 1{,}645$$

oziroma

$$n = 1{,}645^2 \, \frac{\sigma_1^2}{\mu_1^2} \doteq 18365 .$$

Če bi se trgovalo vsak dan, bi to zneslo približno 494 let.