UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAMNIT

VERJETNOST

PISNI IZPIT

16. JUNIJ 2017

REŠITVE

IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Štirje študentje prespijo izpit in se naslednji dan izgovorijo pri profesorju, da niso mogli priti pravočasno, ker jim je na poti počila guma na avtu. Profesor se jih usmili z dodatnim izpitom, ki je sestavljen iz dveh delov. Prvi del, vreden 60% celotne ocene, je sestavljen iz štirih enakovrednih nalog, drugi del izpita pa obsega le vprašanje 'Katera guma je počila?' in prinese 40% ocene. Vsak študent reši posamezno nalogo iz prvega dela izpita z verjetnostjo 70% in seveda neodvisno od preostalih treh študentov in vprašanj. Pri tem si drugi del ocene (40%) prislužijo le, če vsi enako odgovorijo na vprašanje o gumi. Privzamemo, da študenti ne pričakujejo vprašanja o gumi ter tako nanj odgovarjajo naključno (vse štiri gume izberejo enako verjetno) ter neodvisno tako drug od drugega kot od odgovarjanja na preostala vprašanja.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bodo vsi štirje študenti naredili izpit (da bo vsak zbral vsaj 50%)?

Rešitev: Označimo z G dogodek, da so na vprašanje o gumi vsi kandidati odgovorili enako, z I pa dogodek, da so vsi naredili izpit. Če so na vprašanje o gumi vsi odgovorili enako, je za narejen izpit dovolj ena rešena naloga, sicer pa so potrebne vse štiri s prvega dela izpita. Sledi:

$$P(G) = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \quad P(I \mid G) = \left(1 - 0{,}3^4\right)^4, \quad P(I \mid G^c) = 0{,}7^{16}$$

Po izreku o polni verjetnosti dobimo:

$$P(I) = P(G)P(I \mid G) + P(G^c)P(I \mid G^c) \doteq 0{,}0184\,.$$

b. (10) Recimo, da so vsi naredili izpit. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so na vprašanje o gumi odgovorili enako?

Rešitev: Iskano verjetnost dobimo iz Bayesove formule:

$$P(G \mid I) = \frac{P(G)P(I \mid G)}{P(I)} \doteq 0{,}822\,.$$

2. (20) V posodi imamo kroglice m različnih barv. Števila kroglic posameznih barv so $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Označimo $N = B_1 + B_2 + \cdots + B_m$. Iz posode naključno brez vračanja izberemo n kroglic, tako da so vsi nabori n kroglic enako verjetni. Z $X_1, X_2, \ldots, X_m$ označimo števila kroglic danih barv med izbranimi.

a. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X_k, X_l)$ za $k \neq l$.

Namig: kakšna je porazdelitev $X_k + X_l$?

Rešitev:

Prva možnost: vsota $X_k + X_l$ ima hipergeometrijsko porazdelitev s parametri n, $B_k + B_l$ in N. Posamezna X_k in X_l tudi imata hipergeometrijsko porazdelitev s parametri n, B_k ali B_l in N. Vemo torej, da je

$$\mathrm{var}(X_k) = n \cdot \frac{B_k}{N} \cdot \frac{N - B_k}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

in podobno za X_l. Po istem kopitu je

$$\mathrm{var}(X_k + X_l) = n \cdot \frac{B_k + B_l}{N} \cdot \frac{N - B_k - B_l}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}\,.$$

Iz zveze

$$\mathrm{var}(X_k + X_l) = \mathrm{var}(X_k) + \mathrm{var}(X_l) + 2\mathrm{cov}(X_k, X_l)$$

sledi

$$\mathrm{cov}(X_k, X_l) = -n \cdot \frac{B_k}{N} \cdot \frac{B_l}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}\,.$$

Druga možnost: definirajmo indikatorje

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta izbrana kroglica barve } k, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

in

$$J_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta izbrana kroglica barve } l, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X_k = I_1 + \cdots + I_n$ in $X_l = J_1 + \cdots + J_n$ in posledično

$$\mathrm{cov}(X_k, X_l) = \sum_{k,l=1}^{n} \mathrm{cov}(I_k, J_l)\,.$$

Zaradi simetrije je

$$P\left(I_k = 1\right) = \frac{B_k}{N} \quad \text{in} \quad P\left(J_k = 1\right) = \frac{B_l}{N}\,.$$

Za $k = l$ dobimo

$$\operatorname{cov}(I_k, J_k) = E(I_k J_k) - E(I_k)E(J_k) = -\frac{B_k}{N} \cdot \frac{B_l}{N}\,.$$

Za $k \neq l$ razmišljamo, da sta k-ta in l-ta kroglica naključno izbran par kroglic. Iz tega sledi, da je

$$P(I_1 = 1, J_2 = 1) = \frac{B_k B_l}{N(N-1)}$$

Sledi

$$\operatorname{cov}(I_k, J_l) = \frac{B_k}{N} \cdot \frac{B_l}{N} \left(\frac{N}{N-1} - 1 \right)\,.$$

Poenostavimo v

$$\operatorname{cov}(I_k, J_l) = \frac{B_k}{N} \cdot \frac{B_l}{N} \cdot \frac{1}{N-1}\,.$$

Sestavimo in dobimo

$$\operatorname{cov}(X, Y) = -n \cdot \frac{B_k}{N} \cdot \frac{B_l}{N} + n(n-1) \cdot \frac{B_k}{N} \cdot \frac{B_l}{N} \cdot \frac{1}{N-1}\,.$$

Poračunamo in sledi

$$\operatorname{cov}(X, Y) = -n \cdot \frac{B_k}{N} \cdot \frac{B_l}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}\,.$$

b. (10) Izračunajte verjetnost, da med izbranimi kroglicami manjka vsaj ena barva pri predpostavki, da $B_1 = B_2 = \cdots = B_m = B$. Dobljenih izrazov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Zanima nas verjetnost dogodka $\cup_{k=1}^m \{X_k = 0\}$. Po formuli za vključitve in izključitve iz zaradi simetrije je

$$P\left(\cup_{k=1}^m \{X_k = 0\}\right) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} P\left(X_1 + \cdots + X_k = 0\right)\,.$$

Iz besedila naloge razberemo, da je $X_1 + \cdots + X_k$ hipergeometrijska slučajna spremenljivka s parametri n,kB in N, torej je

$$P\left(X_1 + \cdots + X_k = 0\right) = \frac{\binom{(m-k)B}{n}}{\binom{N}{n}}\,.$$

Sledi

$$P\left(\cup_{k=1}^m \{X_k = 0\}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} \cdot \frac{\binom{(m-k)B}{n}}{\binom{N}{n}}$$

3. (20) Slučajni vektor (X,Y) naj ima gostoto

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi^{3/2}\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}\,.$$

a. (10) Izračunajte robni gostoti $f_X(x)$ in $f_Y(y)$.

Namig: nova spremenljivka $y=\sqrt{1+x^2}\,u$*.*

Rešitev: Zaradi simetrije je treba izračunati samo eno od robnih gostot. Računamo z novo spremenljivko $y=\sqrt{1+x^2}u$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi^{3/2}\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}du}{(1+u^2)^{3/2}\left(1+x^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{c}{1+x^2}\,.
\end{aligned}$$

Ker vemo, da je rezultat gostota, mora biti $c=\pi^{-1}$*.*

b. (10) Naj bosta a in b števili z $a^2+b^2=1$. Izračunajte gostoto vektorja

$$(U,V)=(aX-bY,bX+aY)\ .$$

Rešitev: Preslikava

$$\Phi(x,y)=(ax-by,bx+ay)$$

je bijektivna na ravnini $\mathbb{R}^2$ *in zvezno parcialno odvedljiva. Rešimo enačbi*

$$ax-by=u\quad in\quad bx+ay=v$$

in dobimo

$$x=au+bv\quad in\quad y=-bu+av$$

in sledi

$$J_{\Phi^{-1}}(u,v)=a^2+b^2=1\,.$$

Po transformacijski formuli je

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(au+bv,-bu+av)=\frac{1}{\pi^{3/2}\left(1+u^2+v^2\right)^{3/2}}\,.$$

4. (20) Posoda vsebuje $a \geq 1$ belih in $b \geq 1$ črnih kroglic. Na vsakem koraku iz posode naključno izberemo kroglico, tako da ima vsaka enako verjetnost, da bo izbrana, neodvisno od prejšnjih izbir. Če je izbrana kroglica bela, jo vrnemo v posodo, če pa je črna, je ne vrnemo, pač pa dodamo novo belo kroglico.

a. (10) Naj bo X_k število belih kroglic v posodi takoj po k-tem izbiranju. Pokažite, da je

$$E(X_k) = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^k .$$

Namig: izračunajte $E(X_{k+1}|X_k = j)$.

Rešitev: Poglejmo najprej $E(X_1)$. *Slučajna spremenljivka* X_1 *ima ali vrednost* a *z verjetnostjo* $a/(a+b)$ *ali* $a+1$ *z verjetnostjo* $b/(a+b)$. *Sledi, da je*

$$E(X_1) = a \cdot \frac{a}{a+b} + (a+1) \cdot \frac{b}{a+b} = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right) .$$

Za $k > 1$ *in* $a \leq j \leq a + k$ *računamo*

$$P(X_{k+1} = j|X_k = j) = \frac{j}{a+b} \quad \textit{in} \quad P(X_{k+1} = j+1|X_k = j) = \frac{a+b-j}{a+b} ,$$

torej

$$E(X_{k+1}|X_k = j) = j \cdot \frac{j}{a+b} + (j+1) \cdot \frac{a+b-j}{a+b} = 1 + j\left(1 - \frac{1}{a+b}\right) .$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}) &= \sum_{j=a}^{a+k} E(X_{k+1}|X_k = j)P(X_k = j) \\ &= \sum_{j=a}^{a+k} \left(1 + j\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)\right) P(X_k = j) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E(X_k) . \end{aligned}$$

Formula za $E(X_k)$ *drži za* $k = 1$, *naprej pa jo preverimo z indukcijo.*

b. (10) Izračunajte verjetnost, da boste pri k-tem izbiranju izbrali belo kroglico.

Namig: uporabite formulo za popolno verjetnost z $H_l = \{X_{k-1} = l\}$.

Rešitev: Naj bo $A_k = \{$*pri* k*-tem izbiranju izberemo belo kroglico*$\}$. *Po formuli za popolno verjetnost je*

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \sum_{j=a}^{a+k-1} P(A_k | X_{k-1} = j)\, P(X_{k-1} = j) \\ &= \sum_{j=a}^{a+k-1} \frac{j}{a+b} \cdot P(X_{k-1} = j) \\ &= \frac{1}{a+b} \cdot E(X_{k-1}) \\ &= 1 - \frac{b}{a+b}\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^{k-1} . \end{aligned}$$

5. (20) Za zaporedje nenegativnih celoštevilskih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ z vrednostmi v $\{0, 1, \ldots, m\}$ naj velja

$$P\left(X_{n+1} = k-1 | X_n = k\right) = \frac{k}{m} \quad \text{in} \quad P\left(X_{n+1} = k+1 | X_n = k\right) = 1 - \frac{k}{m}\,.$$

za $0 \leq k \leq m$. Označite z $G_n(s)$ rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X_n.

a. (10) Pokažite, da velja

$$G_{n+1}(s) = sG_n(s) + \frac{1-s^2}{m} \cdot G_n'(s)\,.$$

Rešitev: Iz pogojne porazdelitve sledi, da je

$$E\left(s^{X_{n+1}} | X_n = k\right) = s^{k-1} \cdot \frac{k}{m} + s^{k+1} \cdot \left(1 - \frac{k}{m}\right)\,.$$

Formula drži tudi za robna primera $k = 0$ in $k = m$. Obe strani enačbe pomnožimo z $P(X_n = k)$ in seštejemo po $k = 0, 1, \ldots, m$. Sledi

$$G_{n+1}(s) = \frac{1}{m} G_n'(s) + sG_n(s) - \frac{s^2}{m} G_n'(s)\,.$$

b. (10) Predpostavite, da imata slučajni spremenljivki X_1 in X_2 enako porazdelitev. Pokažite, da je v tem primeru

$$G_1(s) = G_2(s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)^m\,.$$

Poiščite porazdelitev X_n za vse $n \geq 1$.

Rešitev: Označimo skupno rodovno funkcijo X_1 in X_2 z $G(s)$. Po prvem delu mora veljati za $|s| < 1$

$$G(s)(1-s) = \frac{1-s^2}{m} G'(s)$$

ali

$$G'(s) = \frac{mG(s)}{1+s}\,.$$

Rešitev te diferencialne enačbe je

$$G(s) = c(1+s)^m$$

za neko konstanto c. Ker je $G(1) = 1$, mora veljati $c = 2^{-m}$, torej je

$$G(s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)^m$$

ali z drugimi besedami $X_1 \sim \mathrm{Bin}\left(m, \frac{1}{2}\right)$. Po indukciji je $X_n \sim \mathrm{Bin}\left(m, \frac{1}{2}\right)$ za vse $n \geq 1$.

6. (20) Dana je igra na srečo, kjer se vržejo tri poštene kocke. Če na nobeni ne pade šestica, igralec izgubi en evro, sicer pa dobi toliko evrov, kolikor šestic je padlo.

a. (10) Kolikšna je približno verjetnost, da bo imela igralnica po 1000 igrah izgubo?

Rešitev: Označimo z X_i izkupiček igralnice od i-te igre. Velja:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 1 \\ \left(\frac{1}{6}\right)^3 & 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 & 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} & \left(\frac{5}{6}\right)^3 \end{pmatrix}$$

od koder dobimo:

$$\mu_1 := E(X_i) \doteq 0{,}0787 \quad \textit{in} \quad \sigma_1 := \sqrt{\operatorname{var}(X_i)} \doteq 1{,}113\,.$$

Označimo z $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ skupni izkupiček igralnice po n igrah. Po centralnem limitnem izreku je:

$$P(S_n < 0) = P(S_n < -0{,}5) \approx \Phi\left(\frac{-0{,}5 - n\mu_1}{\sigma_1\sqrt{n}}\right).$$

Za $n = 1000$ dobimo:

$$P(S_n < 0) \approx \Phi(-2{,}25) = 1 - \Phi(2{,}25) \doteq 0{,}0122\,.$$

b. (10) Najmanj koliko iger se mora približno odviti, da bo imela igralnica z verjetnostjo vsaj 99% dobiček najmanj 1000 evrov?

Rešitev: Tokrat želimo doseči:

$$P(S_n \geq 1000) = P(S_n > m) \geq \beta\,,$$

kjer je $a = 999{,}5$ in $\beta = 0{,}99$. Iz prejšnje točke se vidi, da bo za to potrebnih več kot 1000 iger, torej lahko uporabimo centralni limitni izrek: to bo res približno tedaj, ko bo:

$$1 - \Phi\left(\frac{a - n\mu_1}{\sigma_1\sqrt{n}}\right) \geq \beta$$

oziroma:

$$\frac{n\mu_1 - a}{\sigma_1\sqrt{n}} \geq q := \Phi^{-1}(\beta) \doteq 2{,}326$$

oziroma:

$$\mu_1 n - q\sigma_1\sqrt{n} - a \geq 0$$

oziroma:

$$\frac{q\sigma_1 - \sqrt{q^2\sigma_1^2 + 4\mu_1 a}}{2\mu_1} \leq \sqrt{n} \leq \frac{q\sigma_1 + \sqrt{q^2\sigma_1^2 + 4\mu_1 a}}{2\mu_1}\,.$$

Spodnja meja je negativna in zato nesmiselna. Sledi:

$$n \geq \left(\frac{q\sigma_1 + \sqrt{q^2\sigma_1^2 + 4\mu_1 a}}{2\mu_1} \right)^2 \doteq 16988{,}17\,.$$

Natančnost pri centralnem limitnem izreku še zdaleč ni tako velika, zato zaokrožimo na 17000 iger.