UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAMNIT

VERJETNOST

PISNI IZPIT

16. AVGUST 2017

IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Predpostavite, da imate 52 kart oštevilčenih s števili $1, 2, \ldots, 13$. Vsako od števil se na kartah pojavi natanko štirikrat. Igralcu bomo razdelili pet naključno izbranih kart, tako da so vse izbire enako verjetne.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da bo igralec dobil karte, na katerih bo pet zaporednih števil kot na primer $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Vrstni red, v katerem bo igralec dobil karte, ni pomemben.

Rešitev: Za vsak $i = 1, 2, \ldots, 9$ *označimo*

$$A_i = \{\textit{igralec bo dobil števila } i, i+1, i+2, i+3, i+4\}\,.$$

Iščemo verjetnost unije $A = \cup_{i=1}^{9} A_i$. *Dogodki v uniji so disjunktni, zato je dovolj poiskati verjetnosti posameznih* A_i. *Prešteti moramo vse podmnožice po pet kart, ki imajo po enega predstavnika števil* $i, i+1, i+2, i+3, i+4$. *Ker imamo v vsaki kategoriji 4 izbire, je takih peteric* 4^5. *Iskana verjetnost je*

$$P(A_i) = \frac{4^5}{\binom{52}{5}}$$

in posledično

$$P(A) = \frac{9 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{192}{54145} \doteq 0{,}003546034\,.$$

b. (10) Privzemite, da kartam dodamo *joker* karto, ki lahko nadomesti katerokoli število, tako da je kart 53. Primer: če joker karto označimo z J, zaporedje $\{3, \mathrm{J}, 5, 6, 7\}$ pomeni pet zaporednih števil, ker J nadomesti število 4. Kolikšna je verjetnost, da bo igralec dobil pet zaporednih števil v tem primeru?

Rešitev: Pet zaporednih kart lahko dobimo na naslednje načine:

- *pet zaporednih kart:* $9 \cdot 4^5$ *izidov*
- *štiri zaporedne karte plus joker:* $10 \cdot 4^4$ *izidov*
- $i, i+2, i+3, i+4$ *plus joker:* $9 \cdot 4^4$ *izidov*
- $i, i+1, i+3, i+4$ *plus joker:* $9 \cdot 4^4$ *izidov*
- $i, i+1, i+2, i+4$ *plus joker:* $9 \cdot 4^4$ *izidov*

Skupaj je to $73 \cdot 4^4$ *izidov, vseh izidov pa je* $\binom{53}{5}$. *Iskana verjetnost je torej*

$$\frac{73 \cdot 4^4}{\binom{53}{5}} = \frac{18688}{2869685} \doteq 0{,}006512213\,.$$

2. (20) Dva zdolgočasena statistika neodvisno mečeta vsak svojo kocko, dokler se njuna izida ne seštejeta v 6. Označite število metov, vključno z zadnjim, z X.

a. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X in jo poimenujte.

   Rešitev: Verjetnost, da bo vsota v nekem metu enaka 6 *je* 5/36*. Posamezni meti so neodvisni, kar pomeni, da ponavljamo isti eksperiment do "uspeha". Sledi* $X \sim \mathrm{Geom}(5/6)$.

b. (10) Izračunajte verjetnost, da bosta statistika dobila vsoto 6 po sodem številu metov.

   Rešitev: Izračunati moramo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{31}{36}\right)^{2k-1}\cdot\left(\frac{5}{36}\right) &= \frac{5}{36}\cdot\frac{36}{31}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{31}{36}\right)^{2k} \\
&= \frac{5}{31}\cdot\frac{31^2}{36^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{31^2}{36^2}} \\
&= 5\cdot 31\cdot\frac{1}{36^2-31^2} \\
&= 5\cdot 31\cdot\frac{1}{5\cdot 67} \\
&= \frac{31}{67}\,.
\end{aligned}$$

3. (20) Slučajni vektor (X,Y) naj ima gostoto

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1-\rho^2)}}\left(e^{\frac{\rho xy}{1-\rho^2}}+e^{-\frac{\rho xy}{1-\rho^2}}\right)$$

za $|\rho|<1$ in $\rho\neq 0$.

a. (10) Izračunajte robni porazdelitvi in ugotovite ali sta X in Y neodvisni.

Rešitev: Robno porazdelitev X dobimo po formuli za robno porazdelitev.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1-\rho^2)}}\left(e^{\frac{\rho xy}{1-\rho^2}}+e^{-\frac{\rho xy}{1-\rho^2}}\right)dy \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dy \\
&\quad +\frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dy \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je robna porazdelitev bivariatne normalne porazdelitve standardizirano normalna. Podobno dobimo, da je Y standardizirano normalna. Ker za $\rho\neq 0$ velja

$$f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)\,,$$

spremenljivki X in Y nista neodvisni.

b. (10) Definirajte $(U,V)=(X+Y,X-Y)$. Izračunajte gostoto (U,V) in gostoto U.

Rešitev: Preslikava

$$\Phi(x,y)=(x+y,x-y)$$

zadošča vsem pogojem transformacijske formule. Računamo

$$\Phi^{-1}(u,v)=\left(\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2}(u-v)\right)$$

in posledično

$$J_{\Phi^{-1}}(u,v)=\det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\,.$$

Sledi

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{8\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{u^2+v^2}{4(1-\rho^2)}} \left(e^{\frac{\rho(u^2-v^2)}{4(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{\rho(u^2-v^2)}{4(1-\rho^2)}} \right) .$$

Robno porazdelitev dobimo po formuli za robno gostoto. Račun razpade na dva integrala. Brez konstant je prvi integral enak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(1-\rho)u^2+(1+\rho)v^2}{4(1-\rho^2)}}\, dv = e^{-\frac{(1-\rho)u^2}{4(1-\rho^2)}} \cdot \sqrt{2\pi}\sqrt{2-2\rho}$$

in podobno za drugi integral. Pokrajšamo in seštejemo, da dobimo

$$f_U(u) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{1+\rho}} e^{-\frac{u^2}{4(1+\rho)}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{1-\rho}} e^{-\frac{u^2}{4(1-\rho)}} .$$

4. (20) V preprostem modelu epidemij predpostavljamo, da se vsak posameznik v populaciji v prvem valu okužb okuži z verjetnostjo p neodvisno od ostalih. V drugem valu okužb se vsak še neokužen posameznik okuži z verjetnostjo enako deležu v prvem valu okuženih posameznikov neodvisno od ostalih. Naj bo X število okuženih posameznikov po prvem valu okužb, Y pa število vseh okuženih posameznikov po drugem valu okužb. Iz besedila izhaja, da je

$$P\left(Y=l|X=k\right)=\binom{n-k}{l-k}\left(\frac{k}{n}\right)^{l-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-l}$$

za $0\leq k\leq l\leq n$.

a. (10) Izračunajte $E(Y|X=k)$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
E(Y|X=k) &= \sum_{l=k}^{n} lP(Y=l|X=k)\\
&= \sum_{l=k}^{n} l\binom{n-k}{l-k}\left(\frac{k}{n}\right)^{l-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-l}\\
&= \sum_{i=0}^{n-k}(k+i)\binom{n-k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k-i}\\
&= k+\frac{(n-k)k}{n}\,.
\end{aligned}$$

Uporabili smo znano pričakovano vrednost binomske slučajne spremenljivke.

b. (10) Izračunajte $E(Y)$.

Rešitev: Ker je $X \sim \mathrm{Bin}(p)$, po formuli za popolno pričakovano vrednost sledi

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} E(Y|X=k)P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{(n-k)k}{n}\right) P(X=k) \\
&= E(X) + \frac{1}{n}E(X(n-X)) \\
&= np - \frac{1}{n}\left(nE(X) - E(X^2)\right) \\
&= np - \frac{1}{n}\left(nE(X) - \mathrm{var}(X) - E(X)^2\right) \\
&= np - \frac{1}{n}\left(n^2p - npq - n^2p^2\right) \\
&= np + \frac{1}{n} \cdot n(n-1)pq \\
&= np + (n-1)pq\,.
\end{aligned}
$$

5. (20) Nenegativna slučajna spremenljivke N naj ima rodovno funkcijo

$$G_N(s) = \frac{\log(1-ps)}{\log(1-p)}$$

za $p \in (0,1)$. Kot znano privzemite, da je za $|x| < 1$

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\,.$$

Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ naj bodo neodvisne od N in neodvisne med sabo. Naj bo $X = I_1 + \cdots + I_N$.

a. (10) Naj bo $X_k \sim \text{Bernoulli}(\rho)$ za $k = 1, 2, \ldots$. Privzemite $p, \rho \in (0,1)$. Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Po formuli je

$$G_X(s) = G_N(G_{I_1}(s))\,.$$

Vemo, da je

$$G_{X_1}(s) = 1 - \rho + \rho s$$

in sledi

$$G_X(s) = \frac{\log(1 - p(1-\rho+\rho s))}{\log(1-p)}\,.$$

Rodovno funkcijo nekoliko predelamo v

$$G_X(s) = \frac{\log(1-p(1-\rho)) + \log\left(1 - \frac{p\rho s}{1-p(1-\rho)}\right)}{\log(1-p)}$$

Ker je

$$\frac{p\rho}{1-p(1-\rho)} < 1\,,$$

kar preverimo, lahko navedemo porazdelitev kot

$$P(X=0) = \frac{\log(1-p(1-\rho))}{\log(1-p)}$$

in za $k \geq 1$

$$P(X=k) = -\frac{\left(\frac{p\rho}{1-p(1-\rho)}\right)^k}{k\log(1-p)}\,.$$

b. (10) Naj bo $X_k \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{2}\right)$. Navedite porazdelitev X.

Rešitev: Računamo

$$G_{X_1}(s) = \frac{s}{2-s}$$

in posledično

$$\begin{aligned}
G_X(s) &= G_N(G(X_1(s)) \\
&= \frac{\log\left(1 - \frac{ps}{2-s}\right)}{\log(1-p)} \\
&= \frac{\log(2-(1+p)s) - \log(2-s)}{\log(1-p)} \\
&= \frac{\log\left(1 - \frac{(1+p)s}{2}\right) - \log\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\log(1-p)} \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{(1+p)s}{2}\right)^k - \left(\frac{s}{2}\right)^k}{k\log(1-p)}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$P(X=k) = -\frac{\left(\frac{(1+p)}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{k\log(1-p)}$$

za $k = 1, 2, \ldots$.

6. (20) Predlagana je naslednja igra na srečo: nasprotnika A in B bosta vsak zase vrgla pošten kovanec 1000-krat. Naj bo X število grbov igralca A in Y število grbov igralca B. Če je $|X - Y| \leq 15$, zmaga A, sicer zmaga B.

a. (10) Pri metu dveh kovancev so 4 možni izidi: GG, GŠ, ŠG, ŠŠ. Vsak izid ima verjetnost 1/4. Dopolnite stavek: Razlika $X - Y$ je kot vsota ____ slučajnih števil, ki jih dobimo z naključnim izbiranjem z vračanjem iz škatle

$$\boxed{?}\quad\boxed{?}\quad\boxed{?}\quad\boxed{?}$$

Namig: Kaj se zgodi z razliko grbov igralca A in igralca B pri vsakem metu kovanca?

Rešitev: Pri vsakem metu dveh kovancev se razlika v številu grbov igralca A in igralca B ne spremeni (oba dobita grb ali oba številko) z verjetnostjo $1/2$*, razlika se poveča z verjetnostjo* $1/4$ *in zmanjša z verjetnostjo* $1/4$*. Trditev sledi.*

b. (10) Izračunajte verjetnost, da zmaga igralec A.

Rešitev: Povprečje škatle iz a. je $\mu = 0$*, standardni odklon pa* $\sigma = \sqrt{1/2}$*. Označimo vsoto naključnih števil, ki jih dobimo z naključnim izbiranjem* $n = 1000$ *listkov iz škatle, z* S_{1000}*. Iz centralnega limitnega izreka sledi*

$$\begin{aligned}
P(|X - Y| \leq 15) &= P(|S_{1000}| \leq 15) \\
&= P(-15 \leq S_{1000} \leq 15) \\
&= P\left(-\frac{15}{\sqrt{1000/2}} \leq \frac{S_{1000}}{\sqrt{1000/2}} \leq \frac{15}{\sqrt{1000/2}}\right) \\
&\approx P(-0,67 \leq Z \leq 0,67) \\
&= \Phi(0,67) - \Phi(-0,67) \\
&= 0,5\,.
\end{aligned}$$