Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

17. junij 2015

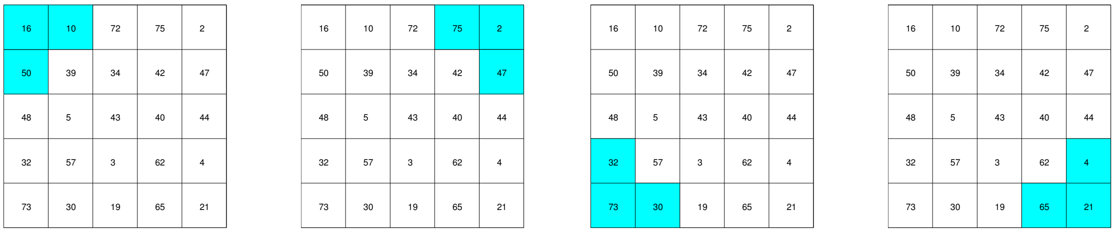
Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Pri igri *Bingo75* dobi igralec kartico s 25 številkami med 1 in 75 kot na spodnji sliki. Na kartici so označeni vzorci *Kot* s 3 polji. V igri potem naključno izberejo 50 števil med 1 in 75, tako da so vsi nabori 50 števil enako verjetni. Igralec dobi izplačilo, če se pojavi vsaj eden od štirih možnih vzorecev *Kot*.



Slika 1 Kartice, ki jih lahko dobi igralec.

a. (10) Izrazite verjetnost, da bo igralec dobil izplačilo. Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Računamo po formuli za vključitve in izključitve. Naj bo A_i dogodek, da se zgodi i-ti kot za $i = 1, 2, 3, 4$. Računamo z upoštevanjem simetrije

$$
\begin{aligned}
P\left(\cup_{i=1}^{4} A_i\right) = & \\
= \quad & 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
= \quad & \frac{1}{\binom{75}{50}} \left(4\binom{72}{47} - 6\binom{69}{44} + 4\binom{66}{41} - \binom{63}{38} \right) .
\end{aligned}
$$

b. (10) Izplačilo se podvoji, če sta pokrita vsaj dva od *Kotov*. Kolikšna je verjetnost, da se bo to zgodilo? Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Oštevilčimo kote od levega spodnjega kota v smeri nasprotni urinemu kazalcu z $i = 1, 2, 3, 4$. Označimo z B_{ij} dogodek, da sta pokrita kota i in j. Uporabili bomo formulo za vključitve in izključitve, vendar je simetrije nekaj manj kot prej. Dogodkov B_{ij} je 6. Po vrsti pogledamo:

> *Presek $B_{ij} \cap B_{kl}$ je dogodek, da je pokritih 9 polj, če se množici $\{i, j\}$ in $\{k, l\}$ sekata, sicer pa 12 polj. Prve vrste presekov je 12, drugih pa so 3.*
>
> *Vsi preseki treh ali več dogodkov B_{ij} pa so taki, da mora biti pokritih vseh 12 polj v vseh štirih Kotih.*

Sledi

$$\begin{aligned}
P\left(\cup_{ij} B_{ij}\right) &= 6P(B_{12}) - 12P(B_{11}\cap B_{12}) - 3P(B_{12}\cap B_{34}) \\
&\quad +(20-15+6-1)P(B_{11}\cap B_{12}\cap B_{13}) \\
&= \frac{1}{\binom{75}{50}}\left(6\binom{69}{44} - 12\binom{66}{41} - 3\binom{63}{38} + 10\binom{63}{38}\right) \\
&= \frac{1}{\binom{75}{50}}\left(6\binom{69}{44} - 12\binom{66}{41} + 7\binom{63}{38}\right)\,.
\end{aligned}$$

2. (20) Billy in Jimmy igrata naslednjo igro. Najprej Billy plača Jimmyju 9 dolarjev. Nato pa mečeta pošten kovanec, dokler ne pade cifra, vendar največ desetkrat. Če cifra pade v n-tem metu, plača Jimmy Billyju 2^n dolarjev (če pa cifra v desetih metih ne pade, Jimmy ne plača ničesar).

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da ima Jimmy izgubo?

Rešitev: Jimmy ima izgubo, če mora plačati več kot 9 *dolarjev. To pa se zgodi, če cifra v prvih treh metih ne pade, kasneje pa pade vsaj enkrat. Verjetnost tega dogodka je:*

$$\frac{1}{2^3}\left(1-\frac{1}{2^7}\right)=\frac{127}{1024}$$

b. (10) Naj bo X Jimmyjev dobiček oz. $-X$ Jimmyjeva izguba. Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Naj bo Y znesek, ki ga mora Jimmy plačati Billyju. Za $n = 1, \ldots 10$ velja $P(Y = 2^n) = 2^{-n}$, poleg tega pa še $P(Y = 0) = 2^{-10}$. Sledi:

$$E(Y) = 0 \cdot 2^{-10} + \sum_{n=1}^{10} 2^n \cdot 2^{-n} = 10$$
$$E(X) = E(9 - Y) = 9 - E(Y) = -1$$

Jimmy ima torej v povprečju izgubo, čeprav je verjetnost dogodka, da bo Jimmy moral plačati več kot \$9, razmeroma majhna.

3. (20) Pri igri Loto za eno kombinacijo označimo sedem številk izmed 39, nakar je prav tako izžrebanih sedem rednih številk. Označena kombinacija zadene sedmico, če je vseh sedem označenih številk tudi redno izžrebanih.

Za sedmico ima Loterija Slovenije poseben sklad. Znesek, ki je v skladu za sedmico, se v enakih delih razdeli med srečneže, ki so jo zadeli. Če nihče ne zadene sedmice, se znesek prenese v naslednji krog.

Recimo, da je bilo vplačanih 800.000 kombinacij, ki so bile vse izbrane naključno in neodvisno[1] (s pojmom kombinacija je tu mišljena izpolnitev kombinacijskega listka z vplačilom in ne nabor določnih sedmih števil izmed 39).

a. (10) Recimo, da smo vplačali eno kombinacijo in zadeli sedmico. Kolikšna je pogojna verjetnost glede na dogodek, da smo zadeli, da si jo bomo morali s kom deliti?

   Rešitev: Označimo s $p = 1/\binom{39}{7}$ *verjetnost sedmice, z* $n = 800.000$ *pa število vplačil kombinacij. Ker so vplačane kombinacije med seboj neodvisne, je to enako verjetnosti, da se bo vsaj ena od* $n-1$ *vplačanih kombinacij ujemala z izbrano kombinacijo. To pa je*

$$1 - (1-p)^{n-1} \doteq 0{,}0507\,.$$

b. (10) Recimo, da je v skladu za sedmico 2.000.000 (dva milijona) evrov. Izračunajte pričakovano vrednost dobitka, ki izhaja iz sedmice, za posamezno vplačilo kombinacije.

   Namig: izrazite vrednost dobitka z indikatorjem dogodka, da zadenemo, in številom drugih vplačil, ki jim pripada sedmica.

   Rešitev: Označimo z a *znesek v skladu za sedmico. Vrednost dobitka je enaka*

$$X = \frac{a\,I}{N+1}\,,$$

   kjer je I *indikator dogodka, da izbranemu vplačilu kombinacije pripada sedmica,* N *pa je število drugih vplačil, ki jim prav tako pripada sedmica. Slučajna spre-*

[1] Številke se približno ujemajo s tistimi iz 96. kroga z žrebanjem 30. 11. 2014.

menljivka N je porazdeljena binomsko $\mathrm{Bin}(n-1,p)$ *in neodvisna od I, zato je*

$$
\begin{aligned}
E(X) &= ap\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k} \\
&= \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \\
&= \frac{a}{n}\big(1-(1-p)^n\big) \\
&\doteq 0{,}127\,.
\end{aligned}
$$

4. (20) Naj bo Π slučajna permutacija n elementov. Za dano permutacijo π je torej $P(\Pi = \pi) = \frac{1}{n!}$. Par (i, j) z $0 < i < j \leq n$ imenujemo inverzijo permutacije π, če velja $\pi(i) > \pi(j)$. Naj bo S_n število vseh inverzij slučajne permutacije Π.

a. (10) Za fiksen $j \leq n$ definirajte slučajne spremenljivke

$$X_{n,j} = \sum_{i=1}^{j-1} I_{ij} \,,$$

kjer so indikatorji I_{ij} definirani kot

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{če je } \pi(i) > \pi(j) \\ 0 & \text{sicer} \,. \end{cases}$$

Pokažite, da so spremenljivke $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n}$ med sabo neodvisne in najdite njihovo porazdelitev. Pokažite, da je $S_n = X_{n,1} + X_{n,2} + \cdots + X_{n,n}$.

Rešitev: Naj bodo $k_1, k_2, \ldots, k_n$ nenegativna cela števila s $k_j < j$. Iz zadnjega števila k_n lahko ugotovimo, da je $\pi(n) = n - k_n$. Ko enkrat vemo $\pi(n)$, lahko iz k_{n-1} rekonstruiramo pozicijo $\pi(n-1)$. Nadaljujemo in sklepamo, da števila $k_1, k_2, \ldots, k_n$ natanko določajo permutacijo. Sledi

$$P\left(X_{n,1} = k_1, X_{n,2} = k_2, \ldots, X_{n,n} = k_n\right) = \frac{1}{n!} \,.$$

Za vsak j je število $\Pi(j)$ porazdeljeno enakomerno na množici $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sledi najprej

$$\Pi(X_{n,n} = k) = P(\Pi(n) = n - k) = \frac{1}{n}$$

za $k = 0, 1, \ldots, n$. Seštejemo

$$\sum_{k_n=0}^{n-1} P\left(X_{n,1} = k_1, X_{n,2} = k_2, \ldots, X_{n,n} = k_n\right) = \frac{1}{(n-1)!} \,.$$

Če torej iz permutacije n elementov "odstranimo" n, sicer pa vrstnega reda ne spreminjamo, dobimo slučajno permutacijo $n - 1$ elementov. Po indukciji sledi

$$P(X_{n,j} = k) = \frac{1}{j}$$

za $0 \leq k < j$. Enakost $S_n = X_{n,1} + X_{n,2} + \cdots + X_{n,n}$ je preštevanje v nekoliko drugačnem vrstnem redu.

b. (10) Izračunajte $E(S_n)$ in $\mathrm{var}(S_n)$.

Rešitev: Iz prvega dela sledi, da je

$$E(X_{n,j}) = \frac{j-1}{2}$$

in

$$\mathrm{var}(X_{n,j}) = \frac{j^2-1}{12}\,.$$

Sledi

$$E(S_n) = \frac{n(n-1)}{4}$$

in

$$\mathrm{var}(S_n) = \frac{n\,\left(-5+3\,n+2\,n^2\right)}{72}\,.$$

5. (20) Kovanec mečemo, dokler ne dobimo vzorca GŠG. Meti so neodvisni, verjetnost grba na vsakem metu pa naj bo $p \in (0,1)$. Naj bo Y potrebno število metov, da dobimo vzorec, vključno z zadnjimi tremi, X pa naj bo število metov do vključno prve številke.

a. (10) Izrazite $P(Y = l|X = k)$ s pomočjo $P(Y = l)$ za vse $k = 1, 2, \ldots$.

Rešitev: Računamo po vrsti. Če je $X = 1$, se čakanje na vzorec začne znova in velja $P(Y = l|X = 1) = P(Y = l - 1)$ za $l \geq 1$. Za $k \geq 2$ pa imamo že del vzorca GŠ. Na naslednjem metu dobimo G z verjetnostjo p in je $Y = k + 1$ ali Š z verjetnostjo $1 - p$ in se čakanje na vzorec ponovno začne. Sledi

$$P(Y = k + 1|X = k) = p \quad \textit{in} \quad P(Y = l|X = k) = (1 - p)P(Y = l - k - 1)$$

za $k \geq 2$ in $l \geq k + 2$.

b. (10) Izračunajte rodovno funkcijo $G_Y(s)$.

Namig: Izračunajte najprej $E(s^Y|X = k)$.

Rešitev: Vemo, da je $X \sim \mathrm{Geom}(1 - p)$. Računamo

$$E\left(s^Y|X = 1\right) = sG_Y(s)$$

in za $k \geq 2$

$$E\left(s^Y|X = k\right) = ps^{k+1} + (1 - p)s^{k+1}G_Y(s)\,.$$

Označimo $q = 1 - p$. Po formuli za popolno pričakovano vrednost je Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned}
G_Y(s) &= \sum_{k=1}^{n} E\left(s^Y|X = k\right) P(X = k) \\
&= (1 - p)s\, G_Y(s) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(ps^{k+1} + (1 - p)s^{k+1}G_Y(s)\right)(1 - p)p^{k-1} \\
&= (1 - p)s\, G_Y(s) + p^2 s^3 \cdot \frac{1 - p}{1 - ps} + ps^3 G_Y(s) \cdot \frac{(1 - p)^2}{1 - ps}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$G_Y(s) = \frac{p^2(1 - p)s^3}{1 - s + ps^2(1 - p)(1 - s + ps)}\,.$$

6. (20) Norbert odpre stojnico z igro s tremi kockami. V vsaki igri, ki stane 1 evro, se vržejo vse tri kocke . Če pade vsaj ena šestica, mora Norbert igralcu vrniti vplačani znesek plus še po en evro za vsako padlo šestico. Če pa ne pade nobena šestica, Norbert obdrži vplačani znesek. Privzamemo, da so kocke standardne in da so vsi meti neodvisni.

a. (10) Izračunajte pričakovano vrednost in varianco Norbertovega dobička po n igrah.

Rešitev: Naj bo X_i Norbertov dobiček v i-ti igri. Velja:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 1 \\ \frac{1}{216} & \frac{15}{216} & \frac{75}{216} & \frac{125}{216} \end{pmatrix},$$

od koder po krajšem računu dobimo $E(X_i) = 17/216$ in $\operatorname{var}(X_i) = 57815/46656$. Če torej z S_n označimo Norbertov dobiček po n igrah, velja $E(S_n) = 17n/216$ in $\operatorname{var}(S_n) = 57815n/46656$.

b. (10) Po približno koliko igrah ima Norbert s približno 95% verjetnostjo pozitiven dobiček?

Rešitev: Označimo spet število iger z n. Iz centralnega limitnega izreka sledi, da mora približno veljati

$$1 - \Phi\left(\frac{-\frac{17}{216}n}{\sqrt{\frac{57815}{46656}n}}\right) = \Phi\left(\frac{17\sqrt{n}}{\sqrt{57815}}\right) = 0{,}95$$

oziroma

$$\frac{17\sqrt{n}}{\sqrt{57815}} \doteq 1{,}645$$

kar je res, če je n približno 540.