Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

17. junij 2020

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.				•	
6.				•	
Skupaj					

1. (20) Arkovi in Benedikovi v istem tednu (od ponedeljka do nedelje) odpotujejo na isti otok, kjer je 10 turističnih destinacij. Vsaka družina vsak dan izbere eno turistično destinacijo, ki jo obišče, pri čemer nikoli ne gredo dvakrat na isto destinacijo. Vse možne kombinacije izbir Arkovih in Benedikovih so enako verjetne, izbire ene in druge družine pa so neodvisne.

a. (5) Kolikšna je verjetnost, da se družini v ponedeljek, torek in sredo srečata na izbranih destinacijah (ostale dneve pa se lahko srečata ali ne)?

Rešitev: Lahko fiksiramo destinacije, ki jih izberejo Arkovi. Benedikovi imajo za ponedeljek, torek in sredo $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ *možnosti in samo ena je ugodna. Iskana verjetnost je torej* $1/720$.

b. (15) Kolikšna pa je verjetnost, da se družini na izbranih destinacijah srečata *natanko* trikrat (ne glede na to, katere dni)? Dovolj je, da rezultat zapišete kot izraz, dobljen iz naravnih števil z uporabo končno mnogo elementarnih računskih operacij (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje).

Namig: oglejte si najprej možnost, da se družini srečata natanko v ponedeljek, torek in sredo in uporabite vključitve in izključitve.

Rešitev: Izračunajmo najprej verjetnost, da se družini srečata natanko v ponedeljek, torek in sredo. Ustrezni dogodek lahko zapišemo kot:

$$B_{123} := (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \setminus (A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7)\,,$$

kjer je A_k *dogodek, da se družini srečata* k*-ti dan. Iz načela vključitev in izključitev in simetrije sledi*

$$\begin{aligned}
P(B_{123}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P\left(\bigcup_{k=4}^{7} (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_k)\right) \\
&= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - 4\,P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&\qquad + 6\,P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\
&\qquad - 4\,P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) \\
&\qquad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7) \\
&= \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8} - \frac{4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} - \frac{4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \\
&\qquad + \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \\
&= \frac{31}{40320}\,.
\end{aligned}$$

Verjetnost iskanega dogodka pa je:

$$\binom{7}{3} P(B_{123}) = 35\, P(B_{123}) = \frac{31}{1152} \doteq 0{,}0269\,.$$

2. (20) V posodi naj bo r belih in r črnih kroglic. Kroglice izbiramo zaporedoma, naključno in brez vračanja.

a. (10) Naj bo M število izbiranj, dokler ne dobimo prve bele kroglice, vključno s prvo belo. Izračunajte $P(M = k)$ za $k = 1, 2, \ldots, r + 1$.

   Rešitev: Predstavljamo si lahko, da so kroglice na $2r$ fiksnih mestih in da vlečemo tako, da najprej izvlečemo kroglico, ki je na prvem mestu, nato tisto na drugem mestu in tako naprej. Pred vlečenjem najprej na mesta razporedimo bele kroglice: to lahko storimo na $\binom{2r}{r}$ enako verjetnih načinov. Na preostala mesta razporedimo črne kroglice, nakar lahko vlečemo.

   Dogodek $\{M = k\}$ pomeni razporeditve, pri katerih je ena bela kroglica na k-tem mestu, preostalih $r - 1$ pa je lahko na $2r - k$ možnih mestih (od k-te izvlečene naprej). To lahko storimo na $\binom{2r-k}{r-1}$ načinov. Sklep:

$$P(M = k) = \frac{\binom{2r-k}{r-1}}{\binom{2r}{r}} .$$

b. (10) Naj bo N število izbiranj, dokler ne dobimo ali r belih ali r črnih kroglic, vključno z zadnjo izbrano kroglico. Dokažite, da je

$$P(N = k) = \frac{2\binom{k-1}{r-1}}{\binom{2r}{r}}$$

   za $k = r, r + 1, \ldots, 2r - 1$.

   Rešitev: Predstavljajmo si, da kroglice razporejamo tako kot v prvi točki. Zadnja izbrana kroglica je lahko bela ali črna. Če je zadnja bela, moramo vse preostale bele (torej $r-1$) razporediti na prvih $k-1$ potegov, za kar imamo $\binom{k-1}{r-1}$ možnosti, vseh pa je, kot že rečeno, $\binom{2r}{r}$.

3. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2x}}$$

za $x > 0$, $-\infty < y < \infty$.

a. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke

$$Z = \frac{Y - X}{\sqrt{X}}\,.$$

Rešitev: Uporabimo transformacijsko formulo. Definiramo

$$\Phi(x,y) = \left(X, \frac{Y-X}{\sqrt{X}}\right)\,.$$

Računamo

$$\Phi^{-1}(x,z) = \left(x, x + \sqrt{x}z\right)\,.$$

Ylahkoa pokažemo, da je $J_{\Phi^{-1}}(x,z) = \sqrt{x}$. Transformacijska formula nam da

$$f_{X,Y}(x,z) = e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sqrt{x}\,.$$

Po krajšanju opazimo, da je gostota produkt dveh faktorjev, od katerih je eden odvisen od x, drugi pa od z. Sledi $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

b. *(10) Utemeljite, da sta slučajni spremenljivki X in*

$$Z = \frac{Y - X}{\sqrt{X}}$$

neodvisni.

Rešitev: Neodvisnost razberemo iz gostote $f_{X,Z}$, ki je produkt faktorja odvisnega od x in faktorja odvisnega od z.

4. (20) Iz množice $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ izberemo slučajne podmnožice $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Izbire so neodvisne, vsakič pa je vsaka od 2^n podmnožic izbrana z enako verjetnostjo. Naj bo $X = \mathrm{card}(\cup_{j=1}^r A_j)$.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Namig:

$$I_i = \begin{cases} 1\,, & \textit{če je } i \in \cup_{j=1}^r A_j \\ 0\,, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Rešitev: Uporabimo alternativno konstrukcijo množic A_j, pri kateri najprej izvedemo nr neodvisnih poskusov z verjetnostjo uspeha $1/2$. Poskuse indeksiramo z indeksi (i, j), $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Nato definiramo A_j kot množico vseh indeksov i, za katere je poskus z indeksom (i, j) uspel. Ni težko videti, da je ta konstrukcija ekvivalentna izvirni.

Če se torej množica A_j nanaša na j-ti stolpec, se indikator I_i nanaša na i-to vrstico: to je indikator dogodka, da uspe vsaj en poskus iz i-te vrstice. Ker so poskusi neodvisni, velja

$$P(I_i = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^r, \qquad P(I_i = 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r.$$

Ker je $X = I_1 + \cdots + I_n$, sledi

$$E(X) = n\, E(I_1) = n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r\right).$$

A iz neodvisnosti poskusov pri alternativni konstrukciji množic A_j sledi, da so tudi indikatorji $I_1, \ldots, I_n$ neodvisni. Torej je

$$\mathrm{var}(X) = n\, \mathrm{var}(I_1) = n \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r\right).$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Namig: za izračun kovarianc začnite z $P(I_1 = 0, I_2 = 0)$ in upoštevajte $P(I_1 = 1, I_2 = 0) = P(I_2 = 0) - P(I_1 = 0, I_2 = 0)$.

Rešitev: Za indikatorja I_1, I_2 velja

$$P\left(I_1 = 0, I_2 = 0\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^r.$$

To sledi iz dejstva, da A_1 ne vsebuje elementov 1 in 2 z verjetnostjo $\frac{1}{4}$ in privzetka o neodvisnih izbirah. Sledi

$$P(I_1 = 1, I_2 = 0) = P(I_2 = 0) - P(I_1 = 0, I_2 = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^r - \left(\frac{1}{4}\right)^r .$$

Zaradi simetrije je izračn $P(I_1 = 0, I_2 = 1)$ enak. Dobimo

$$P(I_1 = 1, I_2 = 1) = 1 - P(I_1 = 1, I_2 = 0) - P(I_1 = 0, I_2 = 1) - P(I_1 = 0, I_2 = 0) .$$

Opazimo, da sta I_1, I_2 neodvisna, zato je kovariance enaka 0 in enako za vse druge pare indikatorjev. Sledi

$$\mathrm{var}(X) = n\,\mathrm{var}(I_1) = n\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r\right).$$

5. (20) Privzemite, da se kolonija bakterij začne v času $n = 0$ z eno bakterijo. Vsaka obstoječa bakterija se od časa n do časa $n + 1$ razdeli na dvoje z verjetnostjo p, neodvisno od ostalih bakterij. Označite število bakterij v trenutku n z Z_n in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n z G_n.

a. (10) Izrazite G_{n+1} z G_n.

Rešitev: Pogojno na $\{Z_n = k\}$ je porazdelitev slučajne spremenljivke Z_{n+1} enaka kot porazdelitev vsote $k + Y$, kjer je $Y \sim \mathrm{Bin}(k, p)$. Sledi

$$E\big(s^{Z_{n+1}} \bigm| Z_n = k\big) = s^k (ps + q)^k ,$$

kjer je $q = 1 - p$. Iz formule za pogojno pričakovano vrednost dobimo

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= E\big(s^{Z_{n+1}}\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\big(s^{Z_{n+1}} \bigm| Z_n = k\big)\, P(Z_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k (ps + q)^k \, P(Z_n = k) \\ &= G_n\big(s(ps + q)\big) . \end{aligned}$$

b. (5) Pokažite, da je $E(Z_n) = (1 + p)^n$.

Rešitev: Vemo, da je $E(Z_n) = G_n'(1)$. Odvajamo rekurzivno formulo na levi in na desni. Dobimo

$$G_{n+1}'(s) = G_n'\big(s(q + ps)\big)(q + 2ps) .$$

Vstavimo $s = 1$ in sledi

$$E(Z_{n+1}) = E(Z_n) \cdot (1 + p) .$$

Ker je $E(Z_0) = 1$, sledi, da je

$$E(Z_n) = (1 + p)^n .$$

c. (5) Izračunajte $P(Z_n = 2^n)$.

Rešitev:

Prvi način. *Rodovne funkcije* G_n *so polinomi z najvišjo stopnjo* 2^n. *Naj bo* a_n *koeficient pri potenci* s^{2^n} *v* G_n. *Koeficient pri najvišji potenci v* G_{n+1} *bo* $a_n p^{2^n}$. *Po indukciji sledi*

$$a_n = p^{2^n - 1}\,.$$

Drugi način. *Dogodek* $\{Z_n = 2^n\}$ *je dogodek, da se vse bakterije na vsakem koraku razdelijo. Najprej je to ena bakterija, nato dve, na koraku od časa* $n-1$ *do časa* n *se mora razdeliti* 2^{n-1} *bakterij. Torej je*

$$P(Z_n = 2^n) = p^{1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}} = p^{2^n-1}\,.$$

6. (20) Znani angleški statistik M. G. Kendall v svojem obsežnem članku *The Random Character of Stock Market Prices* pravi:

> ... dnevno zaporedje cen delnic zgleda "blodeče", kot da bi nek škrat vsak dan naključno izbral število iz velike škatle, ki ima povprečje 0 in neko varianco, in to izbrano število prištel ceni delnice prejšnega dne.

Predpostavite, da je povprečje škatle res 0, varianca pa 4. Razlika cene delnice na začetku leta in na koncu leta je tako enaka vsoti 365 naključno izbranih števil iz te škatle.

a. (5) Recimo, da je bila cena delnice na začetku leta enaka 150 (v ustreznih enotah). Kolikšna je približno verjetnost, da bo na koncu vredna 180 ali več? Uporabite, da je $\Phi(0.79) = 0,79$.

Rešitev: Potrebno je izračunati verjetnost, da bo vsota 365 naključno izbranih števil iz škatle enaka 10 ali več. Z uporabo centralnega limitnega izreka računamo

$$\begin{aligned} P(S_{365} \geq 30) &= P\left(\frac{S_{365}}{\sqrt{365 \cdot 2}} \geq \frac{30}{2 \cdot \sqrt{365}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 0,79) \\ &= 0,21\,. \end{aligned}$$

b. (5) Nekdo vam ponuja naslednjo stavo: na začetku leta je cena delnice 100. Če bo cena delnice na koncu leta 110 ali več, ti plačam 20 enot, če ne pa ti meni plačaš 5 enot. Kaj menite o tej stavi? Uporabite $\Phi(0,26) = 0,60$.

Namig: Kolikšen je vaš pričakovan dobiček?

Rešitev: Najprej izračunamo verjetnost, da bo vrednost delnice na koncu leta 110 *ali več.*

$$\begin{aligned} P(S_{365} \geq 10) &= P\left(\frac{S_{365}}{2 \cdot \sqrt{365}} \geq \frac{10}{2 \cdot \sqrt{365}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 0,26) \\ &= 0,40\,. \end{aligned}$$

Torej bo naše izplačilo z verjetnostjo $0,4$ *enako* 20*, z verjetnostjo* $0,6$ *pa* -5*. Pričakovano izplačilo je* 5*. Stavo s pozitivnim pričakovanim izplačilom seveda vedno sprejmemo.*

c. (10) Recimo, da bo škrat vsakemu številu v škatli dodal število a. Koliko mora dodati, da bo z verjetnostjo 0,9 cena delnice na koncu leta višja kot na začetku. Uporabite $\Phi(1,30) = 0.90$.

Rešitev: Z dodajanjem a se povprečje škatle poveča na a. Računamo

$$P(S_n > 0) = 1 - P(\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} \leq \frac{-E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}\right) .$$

Verjetnost na desni je približno enaka

$$\Phi\left(-\frac{an}{2\sqrt{n}}\right) .$$

Ta verjetnost je približno $0,10$*, ko je argument v funkciji* Φ *enak* -1.30*. Sledi*

$$-a\sqrt{n} = -1.30$$

ali $a \approx 0.068$*.*