Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

23. avgust 2016

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V r škatel vržemo n kroglic. Privzamemo, da so meti med sabo neodvisni, vsako škatlo pa zadenemo z enako verjetnostjo. Označimo z X število praznih škatel na koncu.

a. (10) Označite $P(X = 0) = b(n, r)$ in to količino izračunajte.

Namig: definirajte

$$A_k = \{k\text{-ta škatla je prazna}\}$$

za $k = 1, 2, \ldots, r$ in nato uporabite vključitve in izključitve.

Rešitev: Označimo $A = \{X = 0\}$ in definirajmo

$$A_k = \{k\text{-ta škatla je prazna}\}$$

za $k = 1, 2, \ldots, r$. Velja $A^c = \cup_{k=1}^r A_k$. Računali bomo po formuli za vključitve in izključitve, zato potrebujemo verjetnosti $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$ za vse k. Z drugimi besedami, računamo verjetnost, da bomo v vseh metih zadeli preostalih $r - k$ škatel. Zaradi neodvisnosti metov je

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = \left(\frac{r-k}{r}\right)^n .$$

Zaradi simetrije ima presek katerih koli k dogodkov izmed $A_1, \ldots, A_r$ enako verjetnost, zato velja

$$P(A) = 1 - P(A^c) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \left(\frac{r-k}{r}\right)^n .$$

b. (10) Izračunajte porazdelitev X.

Namig: pogojujte na dogodek, da je natanko določenih k škatel praznih.

Rešitev: Za fiksen $k = 0, 1, \ldots, r-1$ si praznih k škatel lahko izberemo na $\binom{r}{k}$ načinov. Pogojno na to so vse kroglice razmeščene po ostalih $r - k$ škatlah kot da bi jih metali vanje z neodvisnimi meti in bi bile vse škatle enako verjetne. Pogojna verjetnost, da je vseh ostalih $r - k$ škatel polnih, je $b(n, r - k)$. Ker so ti možni načini, da se zgodi $\{X = k\}$, disjunktni, sledi

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{r}{k} \left(\frac{r-k}{r}\right)^n b(n, r-k) = \\ &= \sum_{l=0}^{r-k} (-1)^l \frac{r!}{k!\, l!\, (r-k-l)!} \left(\frac{r-k-l}{r}\right)^n . \end{aligned}$$

2. (20) Kup m rdečih in m črnih kart dobro premešamo, tako da so vsi vrstni redi enako verjetni. Označimo $n = 2m$ število vseh kart. Za fiksen k z $1 \leq k \leq n$ definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k \text{ ta karta od vrha kupa rdeča} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

in X_k število rdečih kart med k razdeljenimi kartami od vrha.

a. (10) Za $2 \leq k \leq n$ izračunajte $P(I_k = 1, X_{k-1} = j)$, kjer je $\max(0, k-m) \leq j \leq \min(k-1, m)$.

   Namig: $P(I_k = 1, X_{k-1} = j) = P(X_{k-1} = j)P(I_k = 1 | X_{k-1} = j)$.

   Rešitev: Zaradi simetrije je prvih $k-1$ razdeljenih kart vzorec velikosti $k-1$ izmed vseh n kart. Sledi, da je $X_{k-1} \sim \mathrm{HiperGeom}(k-1, m, n)$. Pogojno na $\{X_{k-1} = j\}$ bo k-ta karta naključno izbrana izmed $n-k+1$ preostalih kart, med katerimi je $m-j$ rdečih, torej bo

$$P(I_k = 1 | X_{k-1} = j) = \frac{m-j}{n-k+1}\,.$$

   Sledi

$$P(I_k = 1, X_{k-1} = j) = \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \frac{m-j}{n-k+1}\,.$$

b. (10) Igralec na srečo lahko po razdeljenih $k-1$ kartah stavi, da bo naslednja karta rdeča. Odloči se, da bo stavil, če bo med še nerazdeljenimi kartami več ali enako rdečih kart kot črnih. Izračunajte verjetnost, da bo igralec stavil in pravilno napovedal rdečo karto. Verjetnost izrazite z ustrezno vsoto, ki je ni treba eksplicitno izračunati.

   Rešitev: Če je po $k-1$ kartah razdeljeno j rdečih kart, bo igralec stavil, če bo $m-j \geq m - [(k-1)-j]$, ali z drugimi besedami $k-1 \geq 2j$. Iskani dogodek, označimo ga z A, lahko torej zapišemo kot

$$A = \cup_{2j \leq k-1}\{X_{k-1} = j, I_k = 1\}\,.$$

   Dogodki v uniji so disjunktni, zato je

$$P(A) = \sum_{2j \leq k-1} \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \frac{m-j}{n-k+1}\,.$$

   Vsoto nekoliko predelamo v

$$P(A) = \frac{m}{n-k+1} \sum_{2j \leq k-1} \frac{\binom{m-1}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n}{k-1}}\,.$$

3. (20) Gostota vektorja (R, X) naj bo dana z

$$f(r,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r e^{-r^2/2}$$

za $0 < x < r$ in 0 sicer.

a. (10) Definirajte $Y = R - X$. Izračunajte gostoto vektorja (X, Y).

Rešitev: Preslikava $(r,x) \overset{\Phi}{\mapsto} (x, r-x)$ *preslika področje* $G = \{(r,x)\colon 0 < x < r\}$ *bijektivno in zvezno parcialno odvedljivo na področje* $H = \{(x,y)\colon x > 0, y > 0\}$. *Jacobijeva determinanta je po absolutni vrednosti enaka* 1, *zato je gostota* (X,Y) *enaka*

$$g(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(x+y)e^{-(x+y)^2/2}\,.$$

za $x > 0, y > 0$.

b. (10) Poiščite gostoto vektorja $(Z, T) = (X - Y, 2XY)$. Sta Z in T neodvisni slučajni spremenljivki? Kakšni sta porazdelitvi spremenljivk Z in T?

Rešitev: Preslikava $(x,y) \overset{\Phi}{\mapsto} (x-y, 2xy)$ *preslika področje* H *bijektivno in zvezno parcialno odvedljivo na področje* $\mathbb{R} \times (0,\infty)$. *Izračunamo lahko*

$$\Phi^{-1}(z,t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}(z + \sqrt{2t+z^2}), \frac{1}{2}(-z + \sqrt{2t+z^2})\right), & \textit{če je } z > 0 \\ \left(\frac{1}{2}(-z + \sqrt{2t+z^2}), \frac{1}{2}(z + \sqrt{2t+z^2})\right), & \textit{če je } z < 0 \end{cases}$$

Jacobijevo determinanto dobimo za $z > 0$ *kot*

$$\begin{aligned} J_{\Phi^{-1}}(z,t) &= \frac{1}{4}\left((1 + \frac{z}{\sqrt{2t+z^2}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2t+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{2t+z^2}}(-1 + \frac{z}{\sqrt{2t+z^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2t+z^2}}\,. \end{aligned}$$

Zaradi simetrije je rezultat za $z < 0$ *enak. Sledi*

$$f_{Z,T}(z,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2t+z^2}e^{-(2t+z^2)/2}\,\frac{1}{2\sqrt{2t+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\,e^{-t}\,.$$

Slučajni spremenljivki Z *in* T *sta neodvisni z* $Z \sim N(0,1)$ *in* $T \sim \exp(1)$.

4. (20) Predpostavite, da je število otrok v naključno izbrani družini slučajna spremenljivka N s porazdelitvijo

$$P(N = n) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

za $n = 1, 2, \ldots$. Predpostavite, da je spol vsakega otroka moški ali ženski z verjetnostjo $1/2$ neodvisno od ostalih otrok. Naj bo X število otrok moškega spola in Y število otrok ženskega spola v naključno izbrani družini.

a. (10) Izračunajte

$$P(X = k, Y = l | N = n)$$

za $n \geq 1$ in $k, l \geq 0$ in $k + l = n$.

Rešitev: Iz besedila naloge sledi, da je pogojno na $\{N = n\}$ slučajna spremenljivka X binomska s parametroma n in $1/2$. Sledi

$$P(X = k, Y = l | N = n) = P(X = k | N = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

b. (10) Izračunajte večrazsežno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Rešitev: Možne vrednosti za slučajni spremenljivki X in Y so vsi pari (k, l) z $k, l \geq 0$. Računamo

$$\begin{aligned} P(X = k, Y = l) &= P(X = k, N = k + l) \\ &= P(X = k | N = k + l)\, P(N = k + l) \\ &= \binom{k+l}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k+l-1} \\ &= \frac{1}{2} \binom{k+l}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+l} \end{aligned}$$

5. (20) Slučajne spremenljivke I_1, I_2, W_1, W_2 naj bodo vse neodvisne, celoštevilske nenegativne z $I_1, I_2 \sim \text{Bernoulli}(p)$, W_1 in W_2 pa imata enako porazdelitev. Definirajte $W = 2 + I_1W_1 + I_2W_2$. Predpostavite, da ima W enako porazdelitev kot W_1 in W_2. Predpostavite $0 < p < 1/2$.

a. (10) Utemeljite, da velja

$$G_W(s) = s^2 \left((1-p) + pG_W(s)\right)^2 .$$

Rešitev: Vse spremenljivke so nenegativne celoštevilske. Zaradi neodvisnosti bo

$$G_W(s) = s^2 E\left(s^{I_1W_1}\right) E\left(s^{I_2W_2}\right) .$$

Računamo

$$E\left(s^{I_1W_1}\right) = P(I_1 = 0) + E\left(s^{W_1} | I_1 = 1\right) P(I_1 = 1) = (1-p) + pG_{W_1}(s) .$$

Pri zgornjem smo upoštevali neodvisnost I_1 in W_1. Podobno računamo za I_2W_2. Sledi

$$G_W(s) = s^2 \left((1-p) + pG_W(s)\right)^2 .$$

b. (10) Navedite porazdelitev W. Kot znano privzemite, da je za $|x| < 1$

$$\sqrt{1-x} = 1 - x/2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-2)!\, x^k}{2^{2k-1} \cdot k! \cdot (k-1)!} .$$

Rešitev: Enačba v prvem delu je kvadratna enačba za $G_W(s)$. Po Vietovi formuli je

$$G_W(s) = \frac{1 - 2pqs^2 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2}}{s^2p^2} .$$

Ker morajo biti vsi koeficienti v rodovni funkciji nenegativni, izberemo v Vietovi formuli negativen predznak. Po krajšanju sledi

$$G_W(s) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!} \cdot 4^k p^{k-2} q^k s^{2k-2} .$$

Razberemo, da je

$$P(W = 2k-2) = \frac{(2k-2)!}{2 \cdot k! \cdot (k-1)!} \cdot p^{k-2} q^k .$$

za vse $k \geq 2$.

6. (20) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo 1/2. Nato bo iz izbrane škatle izbral $n = 100$ listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

   Namig: Računate $P(S_{100} > 0)$.

   Rešitev: Pomagamo si s centralnim limitnim izrekom. Če izbiramo $n = 100$ listkov iz škatle s povprečjem 1 in varianco 10, je

$$\begin{aligned} P(S_{100} > 0) &= P\left(\frac{S_{100} - 100}{100} > -\frac{100}{100}\right) \\ &\approx P(Z > -1) \\ &= 0,84\,. \end{aligned}$$

   Sledi $P(A) = 0,84$.

b. (10) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno $0,99$?

   Rešitev: Po centralnem limitnem izreku bi moralo biti

$$\begin{aligned} P(S_n > 0) &= P\left(\frac{S_n - n}{10\sqrt{n}} > -\frac{-n}{10\sqrt{n}}\right) \\ &\approx P\left(Z > -\frac{\sqrt{n}}{10}\right)\,. \end{aligned}$$

   Če želimo, da je ta verjetnost $0,99$, mora biti

$$\frac{\sqrt{n}}{10} = 2,32\,,$$

   torej $n \approx 538$.