Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

25. avgust 2015

REŠITVE

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Del igre *Bingo60* je bonus igra. V igri imamo ploščice

$$\boxed{800} \quad \boxed{400} \quad \boxed{200} \quad \boxed{100} \quad \boxed{\text{EXIT}}\ .$$

Računalnik ploščice obrne in naključno premeša, igralec pa lahko izbere obrnjeno ploščico. Če dobi $\boxed{800}$, je izplačilo 800 in je igre konec. Če dobi $\boxed{\text{EXIT}}$ je igre konec z izplačilom 0. Če dobi eno od ostalih treh ploščic, neodvisno od izbire vržemo pošten kovanec. Če je izid grb, je igre konec in je izplačilo število na izbrani ploščici. Če je izid številka, igralec lahko izbira naključno med ploščicami z enakim ali boljšim izplačilom, neodvisno od prejšnjih izbir.

Primer: če je igralec izbral $\boxed{200}$ in je na kovancu padla številka, lahko ponovno izbira med $\boxed{200}$, $\boxed{400}$ in $\boxed{800}$.

Pri vseh izbirah so vse ploščice enako verjetne. Naj bo X končno izplačilo.

a. (10) Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Možne vrednosti X so 0, 100, 200, 400 in 800. Izplačilo 0 je možno le v primeru, ko dobimo $\boxed{\textit{EXIT}}$ na prvem koraku. Torej je $P(X = 0) = 1/5$. Izplačilo 100 dobimo, če na prvem koraku izbermo 100 in dobimo grb ali na prvem koraku izberemo $\boxed{\textit{100}}$, dobimo številko in ponovno izberemo $\boxed{\textit{100}}$. Sledi

$$P(X = 100) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{40}\,.$$

Izplačilo 200 dobimo, če na prvem koraku izberemo $\boxed{\textit{200}}$ in grb ali na prvem koraku dobimo $\boxed{\textit{100}}$ ali $\boxed{\textit{200}}$, potem številko in v ponovnem izbiranju izberemo $\boxed{\textit{200}}$. Sledi

$$P(X = 200) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{120}\,.$$

Podobno sledi

$$P(X = 400) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{120}\,.$$

in

$$P(X = 800) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{37}{120}\,.$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: Računamo iz porazdelitve

$$E(X) = 100 \cdot \frac{15}{120} + 200 \cdot \frac{19}{120} + 400 \cdot \frac{25}{120} + 800 \cdot \frac{37}{120} = \frac{44900}{120}$$

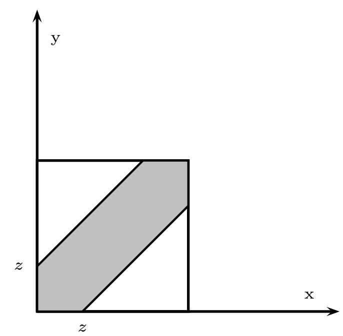
in

$$E(X^2) = 100^2 \cdot \frac{15}{120} + 200^2 \cdot \frac{19}{120} + 400^2 \cdot \frac{25}{120} + 800^2 \cdot \frac{37}{120} = \frac{28590000}{120}\,,$$

torej

$$\mathrm{var}(X) = \frac{3536975}{36}\,.$$

2. (30) Na kvadratu s stranico $a = 1$ naključno izberemo točko. Označimo z X in Y koordinati izbrane točke in definirajmo $Z = |X - Y|$.



Sl. 1 Množica točk, za katere je $|x - y| \leq z$.

a. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke Z.

Namig: Množica točk na kvadratu, za katere je $|x - y| \leq z$ za nek $z \in (0, 1)$ je take oblike kot osenčena množica na sliki 1.

Rešitev: Vrednosti slučajne spremenljivke Z bodo vedno na intervalu $[0, 1]$, zato bo gostota $f_Z(z) = 0$ za $z \notin [0, 1]$. Naj bo $z \in [0, 1]$. Iz slike 1 razberemo, da je $P(Z \leq z)$ enaka ploščini osenčenega lika, torej

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - (1 - z)^2 \,.$$

Gostoto dobimo z odvajanjem, torej je

$$f_z(z) = \begin{cases} 2(1 - z) & \text{za } z \in [0, 1] \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

b. (10) Najdite $E(Z)$, $\mathrm{var}(Z)$ in tak z, da bo $P(Z \leq z) = P(Z \geq z)$.

Rešitev: Po formuli je

$$E(Z) = 2 \int_0^1 z(1 - z) \, \mathrm{d}z = \frac{1}{3}$$

in

$$E(Z^2) = 2 \int_0^1 z^2(1 - z) \, \mathrm{d}z = \frac{1}{6} \,,$$

torej

$$\mathrm{var}(Z) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \,.$$

Za tretje vprašanje moramo poiskati tak z, da bo

$$P(Z \leq z) = 2\int_0^z (1-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,,$$

torej

$$1-(1-z)^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Sledi

$$z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

3. (20) V nekem bloku živi n poročenih parov. V času zimskih obolenj naključno zboli m ljudi tega bloka ne glede na starost ali spol, pri čemer je $m \leq 2n$. Vsak nabor m ljudi je enako verjeten.

a. (10) V bloku živita tudi zakonca Zupan. Določi verjetnost, da sta oba zakonca zdrava.

Rešitev: Bolezen si naključno izbere m *ljudi izmed* $2n$ *stanujočih. Verjetnost, da zgreši oba Zupanova je torej*

$$P(G) = \frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}} = \frac{(2n-m)(2n-m-1)}{2n(2n-1)} = (1 - \frac{m}{2n})(1 - \frac{m}{2n-1}) \, .$$

b. (10) Z X označimo slučajno spremenljivko, ki nam pove število parov, v katerih sta obe osebi zdravi. Določi $E(X)$.

Rešitev: S simbolom I_i *označimo indikator, podan s predpisom*

$$I_i := \begin{cases} 1, & \textit{če sta oba osebka } i\textit{–tega para zdrava,} \\ 0, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$*. Tedaj velja* $X = I_1 + \ldots + I_n$*. Ker so indikatorji* I_i *enako porazdeljeni, velja*

$$E(X) = nE(I_i) = n(1 - \frac{m}{2n})(1 - \frac{m}{2n-1}) \, .$$

4. (20) Predpostavljajte, da so meti kovanca med sabo neodvisni, vsakič pa je verjetnost za grb enaka p. Naj bo W_n število potrebnih metov vključno z zadnjim, dokler prvič ne bomo videli n zaporednih grbov.

a. (10) Utemeljite, da velja

$$P\left(W_n = k+1 | W_{n-1} = k\right) = p$$

in za $l > k+1$

$$P(W_n = l | W_{n-1} = k) = qP(W_n = l-k-1)\,.$$

Rešitev: Če na k-tem metu prvič dobimo $n-1$ grbov zapovrstjo, se lahko zgodi dvoje: na naslednjem metu dobimo grb in je $W_n = k+1$ ali na naslednjem metu dobimo številko in se "čakanje" na n grbov zapovrstjo začne znova. Zgornji enačbi sta matematični zapis tega dejstva.

b. (10) Pokažite, da je

$$E\left(W_n | W_{n-1} = k\right) = k+1+qE(W_n)$$

in izračunajte $E(W_n)$.

Rešitev: Iz pogojnih verjetnosti sledi, da je

$$\begin{aligned}
E\left(W_n | W_{n-1} = k\right) &= p(k+1) + \sum_{l=k+1+n}^{\infty} qlP(W_n = l-k-1) \\
&= p(k+1) + q\sum_{m=n}^{\infty}(m+k+1)P(W_n = m) \\
&= p(k+1) + q(k+1) + qE(W_n) \\
&= k+1+qE(W_n)\,.
\end{aligned}$$

Obe strani zadnje enačbe pomnožimo z $P(W_{n-1} = k)$ in seštejemo. Sledi

$$\begin{aligned}
E(W_n) &= \sum_{k=n-1}^{\infty} E(W_n | W_{n-1} = k)P(W_{n-1} = k) \\
&= \sum_{k=n-1}^{\infty} \left(k+1+qE(W_n)\right)P(W_{n-1} = k) \\
&= E(W_{n-1}) + 1 + qE(W_n)\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$E(W_n) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} E(W_{n-1})\,.$$

Če upoštevamo $E(W_1) = p^{-1}$*, sledi*

$$E(W_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^k}\,.$$

5. (20) Slučajne spremenljivke $\xi_1, \xi_2, \ldots$ naj bodo med sabo neodvisne, enako porazdeljene z $\xi_1 \sim$ Bernoulli(1/2). Označite $T = \inf\{k\colon \xi_{k-1} = \xi_k = 1\}$, torej najmanjše število spremenljivk dokler se v zaporedju ne pojavi vzorec 11. Naj bo za vsak $n \geq 1$ slučajna spremenljivka C_n enaka številu neprekrivajočih se ponovitev vzorca 11 v zaporedju $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Označite rodovno funkcijo spremenljivke T z G, rodovno funkcijo spremenljivke C_n pa s H_n.

a. (10) Pokažite, da velja

$$G(s) = \frac{s^2}{4} + \frac{s^2 G(s)}{4} + \frac{sG(s)}{2}\,.$$

Rešitev: Definirajmo dogodke $K_1 = \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\}$, $K_2 = \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\}$ *in* $K_3 = \{\xi_1 = 0\}$. *Dogodki so particija prostora izidov. Računamo lahko*

$$G(s) = E(s^T) = E(s^T|K_1)P(K_1) + E(s^T|K_1)P(K_1) + E(s^T|K_1)P(K_1)\,.$$

Pogojno na K_1 *je* $T = 2$, *pogojno na* K_2 *ima* T *porazdelitev enako porazdelitvi* $T + 2$, *pogojno na* K_3 *pa porazdelitev* $T + 1$. *Izračunamo*

$$G(s) = \frac{s^2}{4 - 2s - s^2}\,.$$

b. (10) Pokažite, da velja

$$H_n(s) = P(T > n) + \sum_{k=0}^{n} s\, H_{n-k}(s) P(T = k)\,.$$

Pri tem razumemo, da je $H_0(s) = H_1(s) = 1$.

Rešitev: Očitno velja $\{C_n = 0\} = \{T > n\}$. *Dogodek* $\{T = k\}$ *je odvisen le od spremenljivk* $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, *zato je število ponavljanj vzorca 11 v zaporedju* $(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$ *neodvisno od* $\{T = k\}$ *s porazdelitvijo enako porazdelitvi* C_{n-k}. *Za* $1 \leq k \leq n$ *velja*

$$E\left(s^{C_n} \cdot 1(T = k)\right) = E\left(s^{1 + C_{n-k}}\right)\, P(T = k)\,.$$

Po definiciji je

$$\begin{aligned}
H_n(s) &= E(s^{C_n}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(s^{C_n} \cdot 1(T = k)\right) \\
&= P(T > n) + \sum_{k=0}^{n} sH_{n-k}(s)\, P(T = k)\,.
\end{aligned}$$

Ker je $P(T = 0) = P(T = 1) = 1$ *zgornja formula sledi.*

6. (20) Kovanec mečemo $2n$-krat. Meti so neodvisni, verjetnost za grb pa je $p = 1/2$. Označimo število grbov v $2n$ metih z S_{2n}.

a. (10) Kolikšen mora biti n, da bo približno veljalo

$$P(S_{2n} = n) = 0,01\,?$$

Ocenite z uporabo $\Phi(0,0125) = 0,505$.

Rešitev: Metanje kovancev je kot izbiranje listkov iz škatle, v kateri sta samo števili 0 *in* 1*. Vemo, da je $\mu = 1/2$ in $\sigma = 1/2$. Računamo*

$$\begin{aligned}
P(S_{2n} = n) &= P\big(n - \frac{1}{2} \le S_{2n} \le n + \frac{1}{2}\big) \\
&= P\big(-\frac{1}{2} \le S_{2n} - n \le \frac{1}{2}\big) \\
&= P\big(-\frac{1}{\sqrt{2n}} \le \frac{S_{2n} - n}{\sqrt{2n}/2} \le \frac{1}{\sqrt{2n}}\big) \\
&\approx P\big(-\frac{1}{\sqrt{2n}} \le Z \le \frac{1}{\sqrt{2n}}\big) \\
&= \Phi\big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\big) - \Phi\big(-\frac{1}{\sqrt{2n}}\big) \\
&= 2\Phi\big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\big) - 1 \\
&= 0,01\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\Phi\big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\big) = 0,505\,,$$

torej

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} = 0.0125\,.$$

Izračunamo $n = 3183$.

b. (10) Naj bo $n = 5000$. Kolikšna je verjetnost, da se število grbov in število številk v $2n = 10000$ metih razlikujeta za 100 ali manj?

Namig: Kolikšno mora biti število grbov, da se število grbov in število številk razlikujeta 100 ali manj?

Rešitev: Nalogo najprej malenkost prevedemo. Števili se bosta razlikovali za manj kot 100*, če bo število grbov med* 4950 *in* 5050*. Računamo*

$$
\begin{aligned}
P(4950 \leq S_{2n} \leq 5050) &= P(-50 \leq S_{2n} - 5000 \leq 50) \\
&= P\big(-\frac{50}{\sqrt{2n}/2} \leq \frac{S_{2n} - 5000}{\sqrt{2n}/2} \leq \frac{50}{\sqrt{2n}/2}\big) \\
&= P\big(-1 \leq \frac{S_{2n} - 5000}{\sqrt{2n}/2} \leq\leq 1\big) \\
&\approx P(-1 \leq Z \leq\leq 1\big) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= 0,68\,.
\end{aligned}
$$