UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAMNIT

VERJETNOST

PISNI IZPIT

29. JUNIJ 2017

IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V r škatel vržemo n kroglic. Privzamemo, da so meti med sabo neodvisni, vsako škatlo pa zadenemo z enako verjetnostjo. Označimo z X število praznih škatel na koncu.

a. (10) Definirajte

$$A_k = \{k\text{-ta škatla je prazna}\}$$

za $k = 1, 2, \ldots, r$. Izrazite dogodek $A = \{X = 0\}$ z dogodki A_k.

Rešitev: Velja $A = \cap_{k=1}^{r} A_k^c$.

b. (10) Izračunajte $P(X = 0)$.

Rešitev: Velja $A^c = \cup_{k=1}^{r} A_k$. *Računali bomo po formuli za vključitve in izključitve, zato potrebujemo verjetnosti* $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$ *za vse* k. *Z drugimi besedami, računamo verjetnost, da bomo v vseh metih zadeli preostalih* $r - k$ *škatel. Zaradi neodvisnosti metov je*

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = \left(\frac{r-k}{r}\right)^n .$$

Zaradi simetrije ima presek katerih koli k *dogodkov izmed* $A_1, \ldots, A_r$ *enako verjetnost, zato velja*

$$P(A) = 1 - P(A^c) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \left(\frac{r-k}{r}\right)^n .$$

2. (20) Dana je Pólyeva žara, v kateri je sprva b belih in dve rdeči kroglici. Iz žare drugo za drugo na slepo vlečemo kroglice. Vsakič, ko izvlečemo kroglico določene barve, jo vrnemo v posodo in dodamo še eno novo kroglico iste barve. Vlečemo, dokler ne izvlečemo rdeče kroglice. Privzemite, da se bo to zgodilo z verjetnostjo 1.

a. (10) Označimo z N število vlečenj. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

Rešitev: Možne vrednosti za N so $n = 1, 2, \ldots$ in zanje velja

$$\begin{aligned} P(N = n) &= \frac{b}{b+2} \cdot \frac{b+1}{b+3} \cdots \frac{b+n-2}{b+n} \cdot \frac{2}{b+n+1} \\ &= \frac{2b(b+1)}{(b+n-1)(b+n)(b+n+1)} \,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte $E(N)$.

Namig: $E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n)$.

Rešitev: Iz prve točke sledi

$$P(N \geq n) = \frac{b(b+1)}{(b+n-1)(b+n)} \,.$$

Računamo

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n) \\ &= b(b+1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b+n-1} - \frac{1}{b+n} \right) \\ &= b+1 \,. \end{aligned}$$

3. (20) Porazdelitev *Beta* s parametroma $p, q > 0$ je dana z gostoto

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(p,q)}\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

za $0 < x < 1$, pri čemer je

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx\,.$$

a. (10) Naj bosta X in Y neodvisni ter

$$X \sim \mathrm{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{in} \quad Y \sim \mathrm{Beta}\left(1, \frac{1}{2}\right)\,.$$

Pokažite, da je gostota vektorja $(U,V) = (X, XY)$ dana z

$$f_{U,V}(u,v) = f_X(u)\, f_Y(v/u)\, \frac{1}{u}$$

za $0 < v < u < 1$. Izračunajte gostoto XY eksplicitno. Kot znano privzemite,da je

$$\int_v^1 \frac{1}{u}(1-u)^{-1/2}(u-v)^{-1/2} du = \frac{\pi}{\sqrt{v}}\,.$$

Rešitev: Preslikava $\Phi(x,y) = (x, xy)$ je bijektivna in ustrezno parcialno odvedljiva med množicama $(0,1)^2$ in $\{(u,v)\colon 0 < u < v < 1\}$. Z odvajanjem sledi, da je $J_{\Phi^{-1}}(u,v) = u^{-1}$. Formula za gostoto sledi iz transformacijske formule. Gostoto $V = XY$ dobimo kot robno gostoto, torej

$$\begin{aligned}
&f_V(v) \\
&= \int_v^1 f_X(u)\, f_Y(v/u)\, \frac{1}{u}\, du \\
&= \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)} \int_v^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{u}\, du \\
&= \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)} \int_v^1 u^{-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(u-v)^{-\frac{1}{2}}\, du \\
&= \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{v}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{v}}\,.
\end{aligned}$$

V zadnji vrstici smo upoštevali znani integral. Konstanta je enaka $\frac{1}{2}$, ker je rezultat gostota z integralom enakim 1. Zapišemo lahko $XY \sim \mathrm{Beta}\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

b. (10) Naj bosta X in Y neodvisni z

$$X \sim \mathrm{Beta}(a,b) \quad \text{in} \quad Y \sim \mathrm{Beta}(a+b,c)$$

za pozitivne konstante a, b in c. Izračunajte gostoto XY. Pri tem upoštevajte, da je

$$\int_v^1 \frac{(1-u)^{b-1}(u-v)^{c-1}du}{u^{b+c}} = \mathrm{B}(b,c)\, v^{-b}(1-v)^{b+c-1}\,.$$

Rešitev: Po formuli iz prvega dela naloge je

$$\begin{aligned}
& f_V(v) \\
= \quad & \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)\mathrm{B}(a+b,c)} \int_v^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\left(\frac{v}{u}\right)^{a+b-1}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{c-1}\frac{1}{u}du \\
= \quad & \frac{v^{a+b-1}}{\mathrm{B}(a,b)\mathrm{B}(a+b,c)} \int_v^1 \frac{(1-u)^{b-1}(u-v)^{c-1}\,du}{u^{b+c}} \\
= \quad & \frac{\mathrm{B}(b,c)}{\mathrm{B}(a,b)\mathrm{B}(a+b,c)}\, v^{a-1}(1-v)^{b+c-1}\,.
\end{aligned}$$

Sledi $V \sim \mathrm{Beta}(a, b+c)$.

4. (20) Generatorji slučajnih števil generirajo zaporedja ničel in enk. Privzemamo, da so posamezna generirana števila neodvisna in je vsako generirano število enako 1 z verjetnostjo 1/2.

a. (10) Pri preverjanju kvalitete generatorja slučajnih števil definiramo slučajno spremenljivko Y, ki šteje, kolikokrat sta se v nizu n generiranih slučajnih ničel in enk pojavili dve enki zapovrstjo. Pri tem dopuščamo prekrivanje v smislu, da sta se v nizu 1011011110111 dve enki zapovrstjo pojavili šestkrat. Izračunajte $E(Y)$.

Rešitev: Definiramo indikatorske slučajne spremenljivke s predpisom

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če sta na mestih } k \textit{ in } k+1 \textit{ enki}, \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-1$. *Velja* $Y = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-1}$, *poleg tega pa se hitro prepričamo, da je*

$$E(I_k) = P(I_k = 1) = \frac{1}{4}.$$

Sledi

$$E(Y) = \frac{n-1}{4}],.$$

b. (15) Naj bo Z število pojavljanj zaporedja 011 v nizu n generiranih slučajnih števil, pri čemer ne dopuščamo prekrivanja. Izračunajte $E(Z)$ in $\mathrm{var}(Z)$.

Rešitev: Dve prekrivajoči zaporedji po treh generiranih števil ne moreta biti hkrati enaki 011, zato omejitev na neprekrivajoče nize ni pomembna. Spet definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če so na mestih } k \textit{ in } k+1 \textit{ in } k+2 \textit{ števila 011}, \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-2$. *Velja* $Z = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-2}$. *Zaradi neodvisnosti je* $E(I_k) = 1/8$, *torej*

$$E(Z) = \frac{n-2}{8}.$$

Za izračun variance potrebujemo kovariance. Naj bo $l > k$. *Če je* $l - k \leq 2$, *je* $I_l I_k = 0$ *z verjetnostjo* 1 *in je zato* $\mathrm{cov}(I_k, I_l) = -E(I_k)E(I_l) = -1/64$. *Za* $l - k \geq 3$ *pa sta* I_k *in* I_l *neodvisna, zato je njuna kovariance enaka* 0. *Računamo*

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Z) &= \sum_{k=1}^{n-2} \mathrm{var}(I_k) + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n-2} \mathrm{cov}(I_k, I_l) \\ &= \frac{(7(n-2)}{64} - \frac{6(n-4)}{64} \\ &= \frac{n+10}{64}. \end{aligned}$$

5. (20) Predpostavite, da za zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ velja

$$E\left(s^{X_{n+1}} | X_n = k\right) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^k \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)}$$

za $n \geq 1$ in $\lambda > 0$. Označite z $G_n(s)$ rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X_n.

a. (10) Naj bo $X_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Navedite porazdelitve $X_2, X_3, \ldots$.

Rešitev: Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(s^{X_{n+1}} | X_n = k\right) P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+s}{2}\right)^k \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)} P(X_n = k) \\ &= e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+s}{2}\right)^k P(X_n = k) \\ &= e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)} G_n\left(\frac{1+s}{2}\right). \end{aligned}$$

Iz predpostavk primeru sledi, da je

$$G_2(s) = e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)} G_1\left(\frac{1+s}{2}\right) = e^{-\lambda(1-s)}.$$

Po indukciji je $X_n \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ *za* $n \geq 1$.

b. (10) Predpostavite, da je $X_1 \sim \mathrm{Po}(\mu)$. Navedite porazdelitve X_n za vse $n \geq 1$.

Rešitev: Vemo, da je

$$G_1(s) = e^{-\mu(1-s)}.$$

Računamo po vrsti z uporabo rekurzije iz prvega dela:

$$\begin{aligned} G_2(s) &= e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}(1-s)} \\ G_3(s) &= e^{-\left[\lambda(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{\mu}{4}\right]} \\ G_4(s) &= \ldots \end{aligned}$$

Po indukciji sklepamo, da je $X_n \sim \mathrm{Po}(\lambda_n)$, *kjer je*

$$\lambda_n = \frac{\mu}{2^{n-1}} + \lambda \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}.$$

6. (20) Berti odpre stojnico z igro s tremi kockami. V vsaki igri, ki stane 1 euro, se vse tri kocke vržejo. Če ne pade nobena šestica, Berti obdrži vplačani znesek. Če pade natanko ena šestica, Berti igralcu vrne vplačani znesek in še en euro. Če padeta natanko dve šestici, Berti igralcu vrne vplačani znesek in še dva eura. Če pa padejo tri šestice, Berti igralcu vrne vplačani znesek in še 14 eurov. Privzamemo, da so kocke standardne in da so vsi meti neodvisni.

a. (10) Izračunajte pričakovano vrednost in varianco Bertijevega dobička po n igrah.

Rešitev: Naj bo X_i Bertijev dobiček v i-ti igri. Velja:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -14 & -2 & -1 & 1 \\ \frac{1}{216} & \frac{15}{216} & \frac{75}{216} & \frac{125}{216} \end{pmatrix},$$

od koder po krajšem računu dobimo $E(X_i) = 1/36$ in $\operatorname{var}(X_i) = 2735/1296$. Če torej z S_n označimo Bertijev dobiček po n igrah, velja $E(S_n) = n/36$ in $\operatorname{var}(S_n) = 2735n/1296$.

b. (10) Po približno koliko igrah ima Berti s približno 95% verjetnostjo pozitiven dobiček?

Rešitev: Označimo spet število iger z n. Iz centralnega limitnega izreka sledi, da mora približno veljati

$$1 - \Phi\left(\frac{-\frac{1}{36}n}{\sqrt{\frac{2735}{1296}n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2735}}\right) = 0{,}95$$

oziroma

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2735}} \doteq 1{,}645$$

kar je res, če je n približno 7400.