Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

30. junij 2016

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Andreja in Bojan izmenoma in brez vračanja vlečeta karte iz dobro premešanega kupa osmih kart, med katerimi so štiri rdeče. Začne Andreja.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo Andreja prva izvlekla rdečo karto?

Rešitev: Predstavljajmo si, da so izidi vse možne razporeditve štirih rdečih kart v kupu. Teh je $\binom{8}{4} = 70$. *Andreja lahko prva izvleče rdečo karto bodisi v prvo bodisi v drugo bodisi v tretje – kot prvo, tretjo ali peto karto v kupu. Tako dobimo, da je ugodnih izidov* $\binom{7}{3} + \binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 46$. *Iskana verjetnost je torej enaka* $46/70 = 23/35 \doteq 0{,}657$.

b. (10) Recimo, da je Andreja res prva izvlekla rdečo karto. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je rdečo karto takoj za tem izvlekel tudi Bojan?

Rešitev: Izidov, ko je Andreja prva izvlekla rdečo karto, takoj za njo pa je rdečo izvlekel še Bojan, je $\binom{6}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 22$. *Iskana pogojna verjetnost je torej enaka* $22/46 = 11/23 \doteq 0{,}478$.

2. (20) V posodi naj bosta črna kroglica in kroglica z oznako 1. Na vsakem koraku iz posode naključno izberemo kroglico. Če ima izbrana kroglica oznako k, jo vrnemo in dodamo še eno kroglico z oznako k. Če je kroglica črna, jo vrnemo v posodo in dodamo kroglico z oznako $n+1$, kjer je n največja oznaka do tik pred izbiranjem.

Primer: Prvih nekaj korakov lahko izgleda kot

| ● ① | → | ● ① ② | → | ● ① ② ① | → | ● ① ② ① ③ | →

| ● ① ② ① ③ ① | → | ● ① ② ① ③ ① ④ | → ⋯

a. (10) Naj bo X število različno označenih kroglic takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglic. Črne kroglice ne štejemo. Izračunajte

$$P(\text{pri } k\text{-tem izbiranju smo izbrali črno kroglico})$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ in potem $E(X)$.

Namig: Indikatorji.

Rešitev: Ko izbiramo k-tič, je v posodi $k+1$ kroglic, od katerih je ena črna in k označenih. Verjetnost, da bomo izbrali črno kroglico, je $1/(k+1)$. Definirajmo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če } k\textit{-tič izberemo črno kroglico} \\ 0 & \textit{sicer} \end{cases}$$

Ker je $X = 1 + I_1 + \cdots + I_{n-1}$, je

$$E(X) = E(I_1) + \cdots + E(I_{n-1}) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\,.$$

b. (10) Naj bo Y število kroglic z oznako 1 v posodi takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglica. Izračunajte $P(Y = k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$.

Rešitev: Če želimo, da bo $Y = k$, moramo natanko $(k-1)$-krat izbrati kroglico z oznako 1. Kroglice z oznako 1 lahko izbiramo v različnih vrstnih redih, ki jih je $\binom{n-1}{k-1}$. Vse te disjunktne možnosti imajo isto verjetnost:

$$\frac{1}{2} \cdots \frac{2}{3} \cdots \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \frac{2}{k+2} \cdots \frac{(n-k)}{n}\,.$$

Sledi

$$P(X = k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{(n-k)! \cdot (k-1)!}{n!} = \frac{1}{n}\,.$$

3. (20) Naj bodo $U_1, U_2, \ldots, U_n$ med sabo neodvisne slučajne spremenljivke z

$$U_i \sim \mathrm{Beta}(i/2, 1/2)\,.$$

a. (10) Naj bosta X in Y neodvisni ter

$$X \sim \mathrm{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) \quad \text{in} \quad Y \sim \mathrm{Beta}\left(\frac{i+1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Pokažite, da je gostota vektorja $(U, V) = (X, XY)$ dana z

$$f_{X,XY}(u,v) = f_X(u)\, f_Y(v/u)\, \frac{1}{u}$$

za $0 < v < u < 1$. Izračunajte gostoto XY eksplicitno. Kot znan upoštevajte integral

$$\int_v^1 u^{-\frac{i+1}{2}}(1-u)^{\frac{i}{2}-1}(u-v)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}\,(1-v)^{\frac{i-1}{2}} v^{-i/2}\,\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}\,.$$

Rešitev: Preslikava $\Phi(x,y) = (x, xy)$ je bijektivna in ustrezno parcialno odvedljiva med množicama $(0,1)^2$ in $\{(u,v)\colon 0 < u < v < 1\}$. Z odvajanjem sledi, da je $J_{\Phi^{-1}}(u,v) = u^{-1}$. Formula za gostoto sledi iz transformacijske formule. Gostoto $V = XY$ dobimo kot robno gostoto, torej

$$\begin{aligned}
f_V(v) &= \int_v^1 f_X(u)\, f_Y(v/u)\, \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{i+1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_v^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{i}{2}-1}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{i+1}{2}-1}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{v^{\frac{i+1}{2}-1}}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{i+1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_v^1 u^{-\frac{i+1}{2}}(1-u)^{\frac{i}{2}-1}(u-v)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{v^{\frac{i+1}{2}-1}}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{i+1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\,(1-v)^{\frac{i-1}{2}} v^{-i/2}\,\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{i+1}{2}\right)} v^{-\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{i+1}{2}-1}\,.
\end{aligned}$$

V zadnji vrstici smo upoštevali znani integral ter zvezo med funkcijama beta in gama. Sklep: $V \sim \mathrm{Beta}\big(1/2, (i+1)/2\big)$.

b. (10) Z matematično indukcijo po n pokažite, da je $\prod_{i=1}^n U_i \sim \mathrm{Beta}(1/2, n/2)$.

Rešitev: Trditev dokažemo z indukcijo. Za $n = 1$ trditev drži. Recimo, da trditev drži za n, zapišemo

$$X = \prod_{i=1}^n U_i \quad \text{in} \quad Y = U_{n+1}\,.$$

Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni. Po indukcijski predpostavki velja $X \sim \mathrm{Beta}(1/2, n/2)$, po predpostavki pa $U_{n+1} \sim \mathrm{Beta}(n/2 + 1/2, 1/2)$. Po prvem delu naloge je

$$\prod_{i=1}^{n+1} U_i \sim \mathrm{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) .$$

Indukcijski korak je s tem narejen.

4. (20) Posoda vsebuje $a \geq 1$ belih in $b \geq 1$ črnih kroglic. Na vsakem koraku iz posode naključno izberemo kroglico, tako da ima vsaka enako verjetnost, da bo izbrana, neodvisno od prejšnjih izbir. Če je izbrana kroglica bela, jo vrnemo v posodo, če pa je črna, je ne vrnemo, temveč dodamo novo belo kroglico.

a. (10) Naj bo X_k število belih kroglic v posodi takoj po k-tem izbiranju. Pokažite, da je

$$E(X_k) = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^k .$$

Namig: izračunajte $E(X_{k+1}|X_k = j)$.

Rešitev: Poglejmo najprej $E(X_1)$. *Slučajna spremenljivka* X_1 *ima ali vrednost* a *z verjetnostjo* $a/(a+b)$ *ali* $a+1$ *z verjetnostjo* $b/(a+b)$. *Sledi, da je*

$$E(X_1) = a \cdot \frac{a}{a+b} + (a+1) \cdot \frac{b}{a+b} = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right) .$$

Za $k > 1$ *in* $a \leq j \leq a+k$ *računamo*

$$P(X_{k+1} = j|X_k = j) = \frac{j}{a+b} \quad \textit{in} \quad P(X_{k+1} = j+1|X_k = j) = \frac{a+b-j}{a+b} ,$$

torej

$$E(X_{k+1}|X_k = j) = j \cdot \frac{j}{a+b} + (j+1) \cdot \frac{a+b-j}{a+b} = 1 - j\left(1 - \frac{1}{a+b}\right) .$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}) &= \sum_{j=a}^{a+k} E(X_{k+1}|X_k = j) P(X_k = j) \\ &= \sum_{j=a}^{a+k} \left(1 + j\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)\right) P(X_k = j) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E(X_k) . \end{aligned}$$

Formula za $E(X_k)$ *drži za* $k = 1$, *naprej pa jo preverimo z indukcijo.*

b. (10) Izračunajte verjetnost, da boste na k-tem izbiranju izbrali belo kroglico.

Rešitev: Naj bo $A_k = \{na\ k\text{-tem izbiranju izberemo belo kroglico}\}$. Po formuli za popolno verjetnost je

$$
\begin{aligned}
P(A_{k+1}) &= \sum_{j=a}^{a+k} P(A_{k+1}|X_k = j)P(X_k = j) \\
&= \sum_{j=a}^{a+k} \frac{j}{a+b} \cdot P(X_k = j) \\
&= \frac{1}{a+b} \cdot E(X_k) \\
&= 1 - \frac{b}{a+b}\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^k .
\end{aligned}
$$

5. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja, pri čemer označimo rodovno funkcijo slučajnega števila potomcev z G. Predpostavite, da je $\mu = G'(1) \leq 1$, tako da proces gotovo izumre. Ko proces izumre, lahko preštejemo, koliko posameznikov v celotnem procesu razvejanja je bilo brez potomcev. Označimo to slučajno spremenljivko z N.

a. (10) Naj bo G_N rodovna funkcija spremenljivke N. Pokažite, da je za $k \geq 1$

$$E(s^N | Z_1 = k) = G_N(s)^k$$

in

$$G_N(s) = G(0)s + G(G_N(s)) - G(0)\,.$$

Rešitev: Če je $k \geq 1$, potem je pogojno na $\{Z_1 = k\}$ slučajna spremenljivka N kot vsota k med sabo neodvisnih kopij spremenljivke N. Trditev sledi. Drugo formulo dobimo s pomočjo formule za popolno pričakovano vrednost.

b. (10) Predpostavite, da je

$$G(s) = \frac{1}{2}(1 + s^2)\,.$$

Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke N.

Namig: za $|s| < 1$ velja

$$\sqrt{1-s} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k+1} s^k\,.$$

Rešitev: Enačbo iz prvega dela lahko rešimo in dobimo

$$G_N(s) = 1 \pm \sqrt{1-s}\,.$$

Koeficient pri s v Taylorjevem razvoju mora biti pozitiven, zato izberemo minus, torej je

$$G_N(s) = 1 - \sqrt{1-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k+1} s^k\,.$$

Sledi

$$P(N = k) = \binom{1/2}{k} (-1)^{k+1}\,.$$

6. (20) Igralnica uvede novo igro na srečo, ki stane 1€. Z verjetnostjo 50% igralec ne dobi ničesar (torej je na izgubi za vplačani evro), z verjetnostjo 49% znaša dobitek 1€ (kar pomeni, da je igralec na ničli), z verjetnostjo 1% pa dobitek znaša 50€ (torej vplačani evro in še dodatnih 49). Privzamemo, da so posamezne igre med seboj neodvisne.

a. (10) Natančno izračunajte verjetnost, da ima igralnica po 50 igrah dobiček, t. j. strogo pozitiven izkupiček.

Rešitev: Igralnica ima lahko dobiček v zgornjem smislu natanko tedaj, ko ne izplača nobenega glavnega dobitka v višini 50€, obenem pa se ne zgodi, da je pri vsaki igri na ničli. Verjetnost tega dogodka je

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{50} - \left(\frac{49}{100}\right)^{50} \doteq 0{,}605\,.$$

Če bi šli neposredno z normalno aproksimacijo, pa bi zapisali, da je izkupiček igralnice enak $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, *kjer je* $n = 50$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *pa so neodvisne s porazdelitvijo:*

$$\begin{pmatrix} -49 & 0 & 1 \\ 0{,}01 & 0{,}49 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Velja $E(X_i) = 0{,}01$ *in* $\mathrm{var}(X_i) = 24{,}5099$, *torej* $E(S_n) = 0{,}01\,n$ *in* $\mathrm{var}(S_n) = 24{,}5099\,n$. *Če je* n *dovolj velik, je po centralnem limitnem izreku verjetnost, da ima igralnica dobiček, približno enaka:*

$$P(S_n > 0) = P(S_n > 0{,}5) \approx 1 - \Phi\left(\frac{0{,}5 - 0{,}01\,n}{\sqrt{24{,}5099\,n}}\right).$$

Za $n = 50$ *dobimo točno* $1 - \Phi(0) = 0{,}5$, *kar se precej razlikuje od pravega rezultata. To je zato, ker je ena od vrednosti skrajna in zato centralni limitni izrek pri tako majhnem* n *še ni dovolj natančen.*

b. (10) Približno določite število iger, po katerih ima igralnica dobiček z verjetnostjo 99%.

Rešitev: V duhu računov iz drugega dela rešitve prejšnje točke iskano verjetnost aproksimiramo kot:

$$P(S_n > 0) \approx 1 - \Phi\left(-\frac{0{,}01\,n}{\sqrt{24{,}5099\,n}}\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{245099}}\right).$$

To bo enako $0{,}99$ *približno takrat, ko bo* $\sqrt{\frac{n}{245099}} = 2{,}326$, *torej približno za* $n = 1326000$.