Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

31. avgust 2017

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V modri škatli je 9 listkov označenih s številkami od 1 do 9, v rdeči škatli pa 5 listkov, označenih s števili od 1 do 5.

a. (10) Iz vsake škatle potegnemo po en listič in iz dobljenih števk sestavimo dvomestno število, tako da je število iz prve škatle z enako verjetnostjo prva števka kot število iz druge škatle. Kolikšna je verjetnost, da bo tako sestavljeno število večje ali enako 50?

Rešitev: Označimo s H dogodek, da bo na prvem mestu število iz modre škatle, z A pa dogodek, da bo dvomestno število večje ali enako 50. Seveda je $P(H) = P(H^c) = 1/2$, $P(A|H) = 5/9$ in $P(A|H^c) = 1/5$. Po formuli za popolno verjetnost je

$$P(A) = P(A|H)\,P(H) + P(A|H^c)\,P(H^c) = \frac{34}{90}\,.$$

b. (10) Na slepo izberemo škatlo in iz nje potegnemo listek s sodo številko. Določi verjetnost, da smo listek potegnili iz modre škatle.

Rešitev: Naj bo H dogodek, da listek potegnemo iz modre škatle, A pa dogodek, da je izbrano število sodo. Po Bayesovi formuli je

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{P(A|H)\,P(H) + P(A|H^c)\,P(H^c)}\,.$$

Vstavimo ustrezne verjentosti.

$$P(H|A) = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{10}{19}\,.$$

2. (20) V teoriji zalog nastopi naslednji problem: pričakujemo, da bo povpraševanje po nekem izdelku celoštevilska slučajna spremenljivka X. V pričakovanju povpraševanja naročimo n izdelkov, kjer je n fiksno celo število. Če vse izdelke na zalogi prodamo, smo naredili cn prometa, kjer je c cena izdelka. Če je povpraševanje manjše od n, recimo $k < n$, naredimo ck prometa, vendar moramo za skladiščenje neprodanih izdelkov plačati $s(n-k)$, kjer je s cena za skladiščenje enega izdelka, tako da je celoten promet $ck - s(n-k)$.

a. (10) Predpostavite, da je $P(X = k) = pq^k$, kjer je $q = 1 - p$ in je $p \in (0, 1)$. Označite z Y celoten promet po zgornjem opisu. Opišite porazdelitev Y.

Rešitev: Možne vrednosti slučajne spremenljivke Y so cn, če prodamo vse izdelke ali $ck - s(n-k)$ za $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Velja

$$P(Y = ck - s(n-k)) = P(X = k) = pq^k$$

in

$$P(Y = cn) = P(X \geq n) = q^n \,.$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$. Kot znano uporabite, da je

$$\sum_{k=0}^{n-1} kq^k = \frac{q - (np+q)\ q^n}{p^2} \,.$$

Rešitev: Po definiciji je

$$E(Y) = \sum_{y_k} y_k \, P(Y = y_k) \,,$$

kjer so y_k vse možne vrednosti spremenljivke Y. Sledi

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{n-1}(ck - s(n-k))pq^k + ncq^n \\ &= (c+s)p \sum_{k=0}^{n-1} kq^k - nsp \sum_{k=0}^{n-1} q^k + ncq^n \\ &= (c+s)p \, \frac{q - (np+q)\ q^n}{p^2} - \frac{nsp(1-q^n)}{p} + ncq^n \,. \end{aligned}$$

3. (20) Naj bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni z $X \sin \mathrm{N}(0,1)$ in $Y \sim \exp(1)$. Kot znano upoštevajte, da je za $a, b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-av-\frac{b}{v}} dv = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}$$

in

$$\int_0^\infty \frac{1}{v^{3/2}} e^{-av-\frac{b}{v}} dv = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-2\sqrt{ab}}$$

a. (10) Definirajte

$$U = \sqrt{2Y} \cdot X\,.$$

Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke U.

Namig: glejte $(U,V) = (U,Y)$.

Rešitev: Preslikava

$$\Phi(x,y) = \left(\sqrt{2y}x, y\right)$$

preslika $(-\infty,\infty) \times (0,\infty)$ bijektivno nase. Računamo

$$\Phi^{-1}(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{2v}}, v\right)\,.$$

Računamo

$$J_{\Phi^{-1}}(u,v) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2v}} & -\frac{u}{2\sqrt{2v^3}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2v}}\,.$$

Sledi, da je

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{4v}} \cdot e^{-v} \cdot \frac{1}{\sqrt{2v}}$$

za $-\infty < u < \infty$ in $v > 0$. Gostoto U dobimo kot robno gostoto. Računamo z uporabo zgornjega integrala

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v-\frac{u^2}{4v}} dv \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{\frac{u^2}{4}}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-|u|} \end{aligned}$$

za $-\infty < u < \infty$.

b. (10) Naj ima X gostoto

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

za $-\infty < x < \infty$ in od nje neodvisna spremenljivka Y gostoto

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y^3}}e^{-\frac{1}{4y}}$$

za $y > 0$. Najdite gostoto $U = X/Y$.

Rešitev: Po formuli za gostoto kvocienta dveh slučajnih spremenljivk računamo

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(uy, y)|y|dy \\ &= \int_0^{\infty} f_X(uy)f_Y(y)|y|dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{1}{y^{3/2}}e^{-|u|y}e^{-\frac{1}{4y}}dy \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{|u|}}e^{-2\sqrt{|u|/4}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{|u|}}e^{-\sqrt{|u|}}. \end{aligned}$$

4. (20) V televizijskem kvizu voditelj tekmovalcu postavlja vprašanja. Za vsak pravilen odgovor tekmovalec dobi točko. Tekmovalec izpade, ko napačno odgovori na dve zaporedni vprašanji.

Privzemite, da tekmovalec na vprašanja odgovarja pravilno z verjetnostjo $p \in (0,1)$, neodvisno od pravilnosti odgovorov na ostala vprašanja. Naj bo X število točk, ki jih bo dosegel tekmovalec in Y število vprašanj, ki mu bodo zastavljena.

a. (10) Definirajte

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{tekmovalec odgovori pravilno na prvo vprašanje}\} \\ H_2 &= \{\text{tekmovalec odgovori nepravilno na prvo in pravilno na drugo vprašanje}\} \\ H_3 &= \{\text{tekmovalec odgovori nepravilno na prvi dve vprašanji.}\} \end{aligned}$$

Izrazite $E(XY|H_i)$ za $i = 1, 2, 3$ z izrazi, ki vsebujejo $E(X)$, $E(Y)$ in $E(XY)$.

Rešitev: Če tekmovalec odgovori pravilno na prvo vprašanje, se zaradi neodvisnosti zgodba začne na novo. Pogojno na H_1 bo X imela porazdelitev kot $X+1$, Y pa porazdelitev $Y+1$. Sledi

$$E(XY|H_1) = E\left((X+1)(Y+1)\right) = E(XY) + E(X) + E(Y) + 1\,.$$

Podobno dobimo pogojno pričakovano vrednost glede na H_2, le da moramo X povečati za 2 in Y povečati za 1, torej je

$$E(XY|H_2) = E(XY) + E(X) + 2E(Y) + 2\,.$$

Očitno je

$$E(XY|H_3) = 0\,.$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Rešitev: Iz prvega dela naloge sledi po formuli za popolno pričakovano vrednost, da je

$$E(XY) = P(H_1)E(XY|H_1) + P(H_2)E(XY|H_2)\,.$$

Iz besedila sledi, da je $P(H_1) = p$ in $P(H_2) = qp$, kjer smo označili $q = 1-p$. Sledi, da je

$$E(XY)\,(1-p-pq) = p\,(E(X) + E(Y) + 1) + pq\,(E(X) + 2E(Y) + 2)\ .$$

Za izračun kovariance potrebujemo $E(X)$ in $E(Y)$. Podobno kot za produkt dobimo

$$E(X) = p(E(X)+1) + pq(E(X)+2) + 2q^2\,,$$

torej

$$E(X)(1-p-pq) = p + 2pq + 2q^2$$

in

$$E(Y) = p(E(Y)+1) + pq(E(Y)+1),$$

torej

$$E(Y)(1-p-pq) = p + pq\,.$$

Sledi

$$E(X) = \frac{1+q}{q^2} \qquad in \qquad E(Y) = \frac{p(1+q)}{q^2}\,.$$

Za produkt dobimo enačbo

$$E(XY)q^2 = \frac{p(2+q)}{q^2} + \frac{pq(3+q)}{q^2}\,,$$

torej

$$E(XY) = \frac{p(2+4q+q^2)}{q^4}$$

ali

$$E(XY) = \frac{p(2+4q+q^2)}{q^4}\,.$$

Končno je

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{p(2+4q+q^2)}{q^4} - \frac{p(1+q)^2}{q^4} \\
&= \frac{p(1+2q)}{q^4} \\
&= \frac{p(q-p)}{q^4}\,.
\end{aligned}$$

5. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja in označite $G(s) = G_{Z_1}(s)$. Definirajte $W_0 = 1$ in $W_n = Z_0 + Z_1 + \ldots + Y_n$ ter $H_n(s) = G_{W_n}(s)$.

a. (10) Utemeljite, da velja

$$E\left(s^{W_{n+1}} | Z_1 = k\right) = sH_n(s)^k$$

za $k = 0, 1, 2 \ldots$ in sklepajte, da je

$$H_{n+1}(s) = sG(H_n(s))\,.$$

Rešitev: Če vemo število k posameznikov v prvi generaciji, bo celotno število posameznikov enako 1 plus vsota k med samo neodvisnih slučajnih spremenljivk z enako rodovno funkcijo kot W_n, kar ustreza številu vseh posameznikov v poddrevesih, ki visijo na posameznikih prve generacije. Rekurzivna formula potem sledi iz formule za popolno pričakovano vrednost.

b. (10) Privzemite, da je

$$G(s) = \frac{1+s^2}{2}\,,$$

kar pomeni, da bo proces razvejanja izumrl z verjetnostjo 1. Naj bo W_∞ celotno število posameznikov, ki bodo kdajkoli živeli. Kot znano privzemite, da za $|s| \leq 1$ funkcije $H_n(s)$ konvergirajo proti rodovni funkciji W_∞, ko $n \to \infty$. Izračunajte porazdelitev W_∞.

Rešitev: Ker je G zvezna za $|s| \leq 1$, bo veljalo

$$\lim_{n\to\infty} H_{n+1}(s) = sG(\lim_{n\to\infty} H_n(s))\,.$$

Če označimo rodovno funkcijo W_∞ z $H(s)$, dobimo enačbo

$$H(s) = sG(H(s)) = \frac{s + sH(s)^2}{2}\,.$$

Rešitvi enačbe sta

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-s^2}}{s}\,.$$

Ker morajo biti koeficienti v razvoju $H(s)$ v vrsto pozitivni, izberemo negativni predznak. Iz Newtonove formule sledi

$$H(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^{2k-1} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1}\,.$$

Sledi

$$P\left(W_\infty = 2k-1\right) = \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1}\,.$$

za $k = 1, 2, \ldots$.

6. (20) Zavarovalnica izda 240.000 polic obveznega avtomobilskega zavarovanja. Premija je enaka £252. Povprečje dejansko izplačanih zahtevkov v preteklem letu je bilo £1240, standardni odklon dejansko izplačanih zahtevkov pa je bil £1830.

a. (10) Matematik, ki računa tveganja, najprej privzame, da bo zahtevkov 20%, torej 48.000. Zahtevki so med seboj neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke s povprečjem £1240 in standardnim odklonom £1830. Ocenite verjetnost, da zbrane premije ne bodo dovolj za izplačilo vseh zahtevkov.

Rešitev: Označimo $n = 48000$ *in posamezne zahtevke z* $X_1, X_2, \ldots, X_{48000}$*. Zavarovalnica od vseh zavarovancev zbere* $C = 240.000 \times 234$ *£. Označimo* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$*. Zanima nas verjetnost* $P(S_n > C)$*. Računamo s pomočjo CLI.*

$$
\begin{aligned}
P(S_n > C) &= P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} > \frac{C - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}\right) \\
&\approx P\left(Z > \frac{C - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}\right) .
\end{aligned}
$$

Vemo, da je $E(S_n) = nE(X_1)$ *in* $\mathrm{var}(S_n) = n \cdot \mathrm{var}(X_1)$*. Sledi*

$$
\frac{C - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} = 2,39 .
$$

Iz tabele preberemo, da je približek verjetnosti $P(Z > 2,39) \doteq 0,008$ *.*

b. (10) Matematik v zavarovalnici se zaveda, da ne more predvideti točnega števila zahtevkov, ki jih bo zavarovalnica morala izplačati v naslednjem letu. Zato spremeni svojo škatlo tako, da vanjo doda listke z ničlami in sicer štirikrat toliko, kolikor je bilo prvotno listkov. Povprečje škatle se tako spremeni na 248 £, standardni odklon pa na 956 £. V tem primeru je potrebno računati, kot da lističe izbiramo 240.000-krat. Ocenite zdaj verjetnost, da zbrane premije ne bodo dovolj za izplačilo vseh zahtevkov.

Rešitev: Računamo podbno kot v a., le da označimo $n = 240.000$ *in uporabimo novo povprečje in nov standardni odklon. Dobimo*

$$
\begin{aligned}
P(S_n > C) &= P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} > \frac{C - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}\right) \\
&\approx P\left(Z > \frac{C - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}\right) ,
\end{aligned}
$$

pri čemer je

$$\frac{C - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} = 2,04\,.$$

Iz tabele preberemo, da je verjetnost približno $P(Z > 2,04) \doteq 0,02.$