Univerza na Primorskem

FAMNIT, Oddelek za matematiko

Verjetnost

2. kolokvij

1. junij 2016

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	
1.			•	
2.			•	
3.			•	
4.				
5.			•	
6.			•	
Skupaj				

1. (20) Naj bosta slučajni spremenljivki U in Z neodvisni z $U \sim \exp(1)$ in $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Naj bo m dano število.

a. (10) Poiščite gostoto slučajnega para $(U, mU + \sqrt{U}Z)$.

Rešitev: Definiramo preslikavo

$$\Phi(u,z) = \big(u, mu + \sqrt{u}z\big) ,$$

ki slika $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ *bijektivno nase. Računamo*

$$\Phi^{-1}(u,x) = \left(u, \frac{x - mu}{\sqrt{u}}\right)$$

in

$$J_{\Phi^{-1}}(u,x) = \frac{1}{\sqrt{u}} .$$

Sledi

$$f_{U,X}(u,x) = e^{-u} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-mu)^2}{2u}} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} .$$

b. (10) Izračunajte gostoto spremenljivke $X = mU + \sqrt{U}Z$. Kot znano privzemite, da za $a > 0$ in $b \geq 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-au - \frac{b}{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}} .$$

Rešitev: Gostoto X *izračunamo kot robno gostoto. Računamo*

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty e^{-u} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-mu)^2}{2u}} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} du \\
&= \frac{e^{mx}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-\left(1+\frac{m^2}{2}\right)u - \frac{x^2}{2u}} du \\
&= \frac{e^{mx}}{\sqrt{2+m^2}} e^{-|x|\sqrt{2+m^2}} .
\end{aligned}$$

2. (20) Na krožnici s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polmerom ena naključno in neodvisno izberemo dve točki. Naj bo R razdalja med tema točkama. Matematično povedano, naj bosta U in V neodvisni slučajni spremenljivki, enakomerno porazdeljeni na $[0, 2\pi)$. Izbrani točki imata koordinati

$$(\cos(U), \sin(U)) \qquad \text{in} \qquad (\cos(V), \sin(V)) \,.$$

a. (10) Izračunajte $E(R)$ in $\text{var}(R)$. Kot znano privzemite, da je

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(x-y)}\, dx = 4\sqrt{2} \,.$$

Rešitev: Razdaljo lahko napišemo kot

$$R = \sqrt{(\cos(U)-\cos(V))^2 + (\sin(U)-\sin(V))^2} \,,$$

kar lahko poenostavimo v

$$R = \sqrt{2-2\cos(U-V)} \,.$$

Računamo

$$\begin{aligned} E(R) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos(u-v)} du dv \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos(u-v)} du \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \\ &= \frac{2}{\pi} \,. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je integral

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos(u-v)} du$$

za vsak v enak. Računamo

$$\begin{aligned} E(R^2) &= E\left(2+2\cos(U-V)\right) \\ &= 2+2E\left(\cos(U-V)\right) \\ &= 2 \,. \end{aligned}$$

Sledi

$$\text{var}(R) = 4 - \frac{4}{\pi^2} \,.$$

b. (10) Izračunajte $\operatorname{cov}(U, R)$.

Namig: nikakor ne integrirajte. Raje pomislite, kaj je $f_{R|U=u}(r)$.

Rešitev: Ko si izberemo prvo točko, si drugo izbiramo neodvisno od prve nekje na krožnici. Pogojna porazdelitev R je enaka, kot če bi gledali razdaljo druge točke od neke fiksne točke, recimo $(1, 0)$. *To pomeni, da sta R in U neodvisni in je posledično* $\operatorname{cov}(U, R) = 0$.

3. (20) V posodi naj bo n belih in n črnih kroglic. Kroglice izbiramo naključno po vrsti brez vračanja. Naj bo X število izbir, pri katerih sta števili belih in črnih kroglic izenačeni. Zapišemo lahko

$$X = I_2 + I_4 + \cdots + I_{2n}\,,$$

kjer je

$$I_{2k} = \begin{cases} 1 & \text{če je po } 2k \text{ izbirah število belih kroglic enako številu črnih} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

a. (10) Izračunajte $\operatorname{cov}(I_{2k}, I_{2l})$.

Namig: pomislite, kaj je

$$P(I_{2l} = 1 | I_{2k} = 1)$$

za $l > k$.

Rešitev: Najprej potrebujemo pričakovane vrednosti. Računamo

$$E(I_{2k}) = P(I_{2k} = 1) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{2k}}\,.$$

To sledi iz hipergeometrijske porazdelitve, saj je prvih $2k$ kroglic naključen vzorec vseh in želimo k belih in k rdečih kroglic. Za pogojno verjetnost opazimo, da se razmislek ponovi z $n-k$ belimi, $n-k$ rdečimi kroglicami in $l-k$ izbirami, torej je

$$P(I_{2l} = 1 | I_{2k} = 1) = \frac{\binom{n-k}{l-k}\binom{n-k}{l-k}}{\binom{2n-2k}{2l-2k}}\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned} E(I_{2k} I_{2l}) &= P(I_{2k} = 1, I_{2l} = 1) \\ &= P(I_{2l} = 1 | I_{2k} = 1) P(I_{2k} = 1) \\ &= \frac{\binom{n-k}{l-k}\binom{n-k}{l-k}}{\binom{2n-2k}{2l-2k}} \cdot \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{2k}} \end{aligned}$$

Iz tega izračunamo kovarianco.

b. (10) Izračunajte $\operatorname{var}(X)$. Dobljenih vsot vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Po formuli je

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{var}(X) \\
&= \sum_k \operatorname{var}(I_{2k}) + 2\sum_{k<l} \operatorname{cov}(I_{2k}, I_{2l}) \\
&= \sum_k P(I_{2k}=1)(1-P(I_{2k}=1)+ \\
&\qquad +2\sum k<l\,(P(I_{2k}=1)P(I_{2l}=1|I_{2k}=1)-P(I_{2k}=1)P(I_{2l}=1) \\
&= \sum_k P(I_{2k}=1)\left(1-P(I_{2k}=1)+\sum_{k<l}(P(I_{2l}=1|I_{2k}=1)-P(I_{2l}=1)\right).
\end{aligned}
$$

4. (20) Danih je n posod, ki vse vsebujejo a rdečih in b belih kroglic. Na slepo izvlečemo kroglico iz prve posode in jo prestavimo v drugo, nato na slepo iz druge prav tako prestavimo naključno izbrano kroglico v tretjo posodo. Postopek nadaljujemo do prestavitve iz predzadnje v zadnjo posodo.

a. (5) Za $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ naj bo X_j število rdečih kroglic, izvlečenih iz j-te posode. Izračunajte $E(X_1)$ in za $j \geq 2$ še $E(X_j | X_{j-1} = k)$, kjer je k katerakoli možna vrednost X_{j-1}.

Rešitev: Ko bomo pri danem pogoju izbirali iz j-te posode, bo v njej $a+k$ rdečih in $b+(1-k)$ belih kroglic. Pri tem je $k = 0, 1$. Sledi, da je

$$E(X_j | X_{j-1} = k) = P(X_j = 1 | X_{j-1} = k) = \frac{a+k}{a+b+1}\,.$$

Dobimo še

$$E(X_1) = P(X_1 = 1) = \frac{a}{a+b}\,.$$

b. (10) Za vse $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ izračunajte $E(X_j)$.

Rešitev: Dobimo

$$E(X_j) = \sum_{k=0}^{1} E(X_j | X_{j-1} = k) P(X_{j-1} = k)\,,$$

torej

$$E(X_j) = \frac{a}{a+b+1} + \frac{E(X_{j-1})}{a+b+1}\,.$$

Računamo po vrsti.

$$E(X_2) = \frac{a}{a+b+1} + \frac{a}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a}{a+b}\,.$$

Po indukciji je potem

$$E(X_j) = \frac{a}{a+b}$$

za vse j.

c. (5) Iz zadnje posode na slepo izvlečemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je rdeča?

Namig: izrazite

$$P\left(\textit{kroglica izvlečena iz zadnje posode je rdeča} | X_{n-1} = k\right)$$

za možne vrednosti k slučajne spremenljivke X_{n-1}.

Rešitev: Označimo $A =$ *kroglica izvlečena iz zadnje posode je rdeča. Velja*

$$P(A|X_{n-1} = k) = \frac{a+k}{a+b+1}\,.$$

Sledi

$$P(A) = P(A|X_{n-1} = 0)P(X_{n-1} = 0) + P(A|X_{n-1} = 1)P(X_{n_1} = 1)\,.$$

Če poračunamo, sledi

$$P(A) = \frac{a}{a+b}\,.$$

5. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja z rodovno funkcijo

$$G_{Z_1}(s) = G(s) = \frac{1}{2}(1 + s^2)\,.$$

Označite $W_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$. Slučajna spremenljivka W_n je število vseh posameznikov, ki so živeli do vključno generacije n. Označite rodovno funkcijo spremenljivke W_n s H_n. Za rodovne funkcije $H_0, H_1, H_2, \ldots$ velja rekurzivna zveza

$$H_0(s) = s \qquad \text{in} \qquad H_{n+1}(s) = s\,G(H_n(s))\,.$$

a. (10) Naj bo $W_\infty = Z_0 + Z_1 + \cdots$ celotno število posameznikov, ki bodo kdajkoli živeli. Ker bo proces razvejanja izumrl z verjetnostjo 1, bo W_∞ končna slučajna spremenljivka. Označite njeno rodovno funkcijo z $H(s)$. Pokažite, da je

$$H(s) = s\,G(H(s))\,.$$

Kot znano lahko upoštevate, da za naraščajoče zaporedje nenegativnih celoštevilskih slučajnih spremenljivk X_n s končno limito X velja $G_{X_n}(s) \to G_X(s)$, ko $n \to \infty$ za vse $|s| < 1$.

Rešitev: Ker je G zvezna in $H_n(s)$ konvergira, ko $n \to \infty$, lahko v rekurzivni formuli izenačimo limito leve in desne strani in na desno limito nesemo v G.

b. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke W_∞.

Namig: upoštevajte, da je

$$\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k-1}{k-1} \frac{x^k}{(2k-1)2^{2k-1}}$$

za $|x| < 1$.

Rešitev: Iz zgornjega sledi

$$H(s) = \frac{s}{2}\big(1 + H^2(s)\big)\,.$$

To je kvadratna enačba za $H(s)$. Rešitvi sta

$$H(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1-s^2}}{s}\,.$$

Ker morajo biti koeficienti v potenčni vrsti za $H(s)$ vsi pozitivni izberemo

$$H(s) = \frac{1 - \sqrt{1-s^2}}{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k-1}{k-1} \frac{s^{2k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}}\,.$$

Sledi

$$P(W_\infty = 2k-1) = \binom{2k-1}{k-1} \frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}}\,.$$

6. (20) Francoska ruleta ima 37 zarez, med katerimi je 18 črnih, 18 rdečih in ena zelena. Igralnica želi uvesti novo igro. Igralec, ki stavi en evro, bi v primeru, ko bi kroglica obtičala v črni zarezi, ta znesek izgubil. V primeru, ko bi kroglica obtičala v rdeči zarezi, bi vplačani znesek dobil nazaj, v primeru, ko bi obtičala v zeleni zarezi, pa bi igralnica vrnila vplačani znesek in primaknila še x evrov. Privzamemo, da je cilinder pošten, torej so vse zareze enako verjetne.

a. (5) Pri katerem x bi bila igra poštena, torej bi bil pričakovani dobitek igralnice v eni igri enak nič?

Rešitev: Označimo z X_1 zaslužek igralnice po eni igri. Iz

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 18/37 & 18/37 & 1/37 \end{pmatrix}$$

izračunamo $E(X_1) = \dfrac{x-18}{37}$, *torej je igra poštena pri* $x = 18$.

b. (15) Pri katerem x ima igralnica po 10.000 neodvisnih igrah dobiček z verjetnostjo približno 95%?

Rešitev: Označimo z X_k zaslužek igralnice po k-ti igri, z S pa zaslužek po 10.000 igrah. Velja $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10000}$. Po centralnem limitnem izreku je S porazdeljen približno normalno z ustrezno pričakovano vrednostjo in varianco. Velja

$$\mathrm{var}(X_1) = \frac{x^2+18}{37} - \left(\frac{x-18}{37}\right)^2$$

ter

$$E(S) = \frac{10000(x-18)}{37} \quad \textit{in} \quad \mathrm{var}(S) = 10000\left[\frac{(x^2+18)}{37} - \left(\frac{x-18}{37}\right)^2\right],$$

torej je

$$P(S>0) \approx 1 - \Phi\left(-\frac{E(S)}{\sqrt{\mathrm{var}(S)}}\right) = \Phi\left(\frac{100(x-18)}{\sqrt{37(x^2+18)-(x-18)^2}}\right),$$

torej x izberemo tako, da bo

$$\Phi\left(\frac{100(18-x)}{\sqrt{37(x^2+18)-(x-18)^2}}\right) = 0{,}95$$

oziroma

$$\frac{100(18-x)}{\sqrt{37(x^2+18)-(x-18)^2}} \doteq 1{,}645\,.$$

Očitno mora biti $x < 18$, sicer bi bilo $E(S) \geq 0$ in bi imela igralnica dobiček največ z verjetnostjo približno $1/2$. Pri $x < 18$ je zgornja enačba ekvivalentna enačbi

$$10000(18 - x)^2 = 1{,}645^2\big(37(x^2 + 18) - (x - 18)^2\big)$$

oziroma

$$(10000 - 36 \cdot 1{,}645^2)x^2 - (360000 + 36 \cdot 1{,}645^2)x + 3240000 - 342 \cdot 1{,}645^2 = 0\,.$$

oziroma

$$9902{,}6\,x^2 - 360097{,}4\,x + 3239075 = 0\,.$$

Ta kvadratna enačba ima numerični rešitvi

$$x_1 \doteq 16{,}31\,, \qquad x_2 \doteq 20{,}05$$

in pravilna bo seveda prva. Za zeleno zarezo torej igralnica vplačanemu znesku primakne še 16 evrov in 31 centov.