Univerza na Primorskem

FAMNIT, Oddelek za matematiko

Verjetnost

2. kolokvij

4. junij 2018

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 12o minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	
1.			•	
2.			•	
3.			•	
4.				
5.			•	
6.			•	
Skupaj				

1. (20) Iz množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 3)$ naključno izberemo tri števila. Vsaka podmnožica treh števil naj bo enako verjetna. Označimo najmanjše od izbranih treh števil z X, srednje z Y in največje z Z.

a. (10) Izračunajte porazdelitev razlike $W = Z - X$.

Rešitev: Slučajna spremenljivka W lahko zavzame vrednosti $2, 3, \ldots, n-1$. Za k iz te množice verjetnost dogodka $\{W = k\}$ izračunamo kot delež ugodnih izbir števil. Vseh možnih izbir je $\binom{n}{3}$. Ugodne izbire pa lahko dobimo tako, da najprej izberemo X iz množice $\{1, 2, \ldots, n-k\}$, nato pa izberemo še Y iz množice $\{X+1, X+2, \ldots, X+k-1\}$; slučajna spremenljivka $Z = X + k$ je tedaj že določena. Ugodnih izbir je torej $(n-k)(k-1)$ in sledi

$$P(W = k) = \frac{(n-k)(k-1)}{\binom{n}{3}} = \frac{6(n-k)(k-1)}{n(n-1)(n-2)}\,.$$

b. (10) Izračunajte porazdelitev vektorja $(Y - X, Z - Y)$.

Rešitev: Možne vrednosti vektorja $(Y - X, Z - Y)$ so pari $(l, m) \in \mathbb{N}^2$, za katere je $l + m < n$. Ugodne izbire trojic (X, Y, Z) ustrezajo izbiram števila X iz množice $\{1, 2, \ldots, n - l - m\}$: tedaj sta $Y = X + l$ in $Z = X + l + m$ že določena. Sledi

$$P(Y - X = l, Z - Y = m) = \frac{n - l - m}{\binom{n}{3}} = \frac{6(n - l - m)}{n(n-1)(n-2)}\,.$$

2. (20) Naj bo $n \geq 2$ in naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne s

$$P(X_k = -1) = P(X_k = 1) = \tfrac{1}{2}$$

za vse $k = 1, 2, \ldots, n$. Označimo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a. (10) Dokažite, da je za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$ slučajna spremenljivka $|S|$ neodvisna od X_k.

Namig: uporabite simetrijo.

Rešitev: Zaradi simetrije je slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ *porazdeljen enako kot* $(-X_1, \ldots, -X_n)$. *Če oba vektorja ustrezno preslikamo, dobimo, da je slučajni vektor* (X_1, S) *porazdeljen enako kot* $(-X_1, -S)$. *Če še ta dva ustrezno preslikamo, dobimo, da je slučajni vektor* $(X_1, |S|)$ *porazdeljen enako kot* $(-X_1, |S|)$, *to pa pomeni, da za* $s = 0, 1, \ldots, n$ *velja*

$$P(X_1 = 1, |S| = s) = P(X_1 = -1, |S| = s)\,.$$

Po drugi strani je

$$P(X_1 = 1, |S| = s) + P(X_1 = -1, |S| = s) = P(|S| = s)\,.$$

Sledi, da je

$$P(X_1 = 1, |S| = s) = P(X_1 = -1, |S| = s) = \tfrac{1}{2}P(|S| = s)\,.$$

b. (10) Je $|S|$ neodvisna od slučajnega vektorja (X_1, X_2)?

Rešitev: Ne. Dogodek $\{X_1 = 1, X_2 = -1, |S| = n\}$ *je namreč nemogoč, medtem ko je*

$$P(X_1 = 1, X_2 = -1)\, P(|S| = n) = 2^{-n-1} > 0\,.$$

3. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-\theta x)^2}{2x}}$$

za $x > 0$ in $-\infty < y < \infty$, θ pa je dan parameter.

a. (10) Pokažite, da sta slučajni spremenljivki X in

$$Z = \frac{Y - \theta X}{\sqrt{X}}$$

neodvisni.

Rešitev: Uporabimo transformacijsko formulo. Definiramo

$$\Phi : (x,y) \to (x, \frac{y-\theta x}{\sqrt{x}}),$$

ki slika $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ *nase. Računamo*

$$\Phi^{-1} : (x,z) \to (x, z\sqrt{x} + \theta x).$$

in

$$J_{\Phi^{-1}}(x,z) = \sqrt{x}.$$

Sledi

$$f_{X,Z}(x,z) = f_{X,Y}(x, z\sqrt{x} + \theta x) \cdot |\sqrt{x}|.$$

in

$$f_{X,Z}(x,z) = e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Hitro se opazi, da velja $X \sim \exp(1)$, $Z \sim N(0,1)$ *in, da sta* X *in* Z *neodvisni.*

b. (10) Kot znano privzemite, da je za $a > 0$ in $b \geq 0$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-ax-\frac{b}{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

Rešitev: Računamo robno gostoto.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^\infty e^{-x} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-\theta x)^2}{2x}} dx \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\theta} \int_0^\infty \tfrac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} e^{-\frac{2+\theta^2}{2}x - \frac{y^2}{2x}} dx \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2+\theta^2}} e^{\theta - \sqrt{(2+\theta^2)y^2}}. \end{aligned}$$

Uporabili smo privzetek za $a = \frac{2+\theta^2}{2}$ *in* $b = \frac{y^2}{2}$.

4. (20) Za okroglo mizo sedi $n \geq 5$ kockarjev. Vsak vrže svojo kocko; vse kocke so standardne (kar pomeni, da lahko pade od 1 do 6 pik), poštene (kar pomeni, da so vsa števila enako verjetna) in neodvisne. Števili iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sta sosednji, če se razlikujeta za 1 ali pa če sta to 1 in 6. Označimo z W število kockarjev, za katere velja, da oba njegova soseda vržeta število pik, ki je sosednje njegovemu (dotični kockar recimo vrže 1, njegov levi sosed 2, njegov desni sosed pa 6).

a. (10) Izračunajte $E(W)$ in $\mathrm{var}(W)$.

Rešitev: Pišimo $W = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$, kjer je I_i indikator dogodka, da oba soseda i-tega kockarja vržeta število pik, ki je sosednje njegovemu. Verjetnost tega dogodka je:

$$E(I_i) = \frac{1}{9},$$

torej je:

$$E(W) = \frac{n}{9}.$$

Za izračun variance sta dva standardna načina. Lahko nastavimo:

$$\mathrm{var}(W) = E(W^2) - \big(E(W)\big)^2$$

in

$$E(W^2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E(I_i I_j).$$

Slučajna spremenljivka $I_i I_j$ je indikator dogodka, da za i-tega in j-tega kockarja velja, da oba soseda vržeta sosednje število pik. Za $i = j$ je verjetnost tega dogodka seveda enaka $1/9$. Če sta i-ti in j-ti kockar sosednja, je verjetnost enaka $1/27$, sicer pa je verjetnost tega dogodka enaka $1/81$ (tukaj potrebujemo predpostavko, da je $n \geq 5$). Seštejemo in dobimo:

$$E(W^2) = \frac{n}{9} + \frac{2n}{27} + \frac{n^2 - 3n}{81}.$$

Odštejemo in dobimo:

$$\mathrm{var}(W) = \frac{4n}{27}.$$

Do tega pa lahko pridemo tudi s kovariancami – nastavimo:

$$\mathrm{var}(W) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(I_i, I_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E(I_i I_j) - E(I_i)E(I_j).$$

Za $i = j$ je $\mathrm{cov}(I_i, I_j) = 1/9 - 1/81 = 8/81$. Če sta i-ti in j-ti kockar sosednja, je $\mathrm{cov}(I_i, I_j) = 1/27 - 1/81 = 2/81$. V vseh ostalih primerih pa je $\mathrm{cov}(I_i, I_j) = 0$:

dogodka, da soseda i-tega in soseda j-tega kockarja vržeta sosednje število pik, sta neodvisna (če sta med njima vsaj dva kockarja, je to očitno, če je med njima en sam kockar, pa to lahko vidimo tako, da pogojujemo na število pik srednjega kockarja). Seštejemo in dobimo:

$$\operatorname{var}(W) = \frac{8}{81} \cdot n + \frac{2}{81} \cdot 2n = \frac{4n}{27}\,,$$

kar je isto kot prej.

b. (5) Naj bo S število kockarjev, ki vržejo šestico. Izračunajte $\operatorname{cov}(W, S)$.

Rešitev: Pišimo $S = J_1 + J_2 + \cdots + J_n$, kjer je J_j indikator dogodka, da j-ti kockar vrže šestico. Poljubna indikatorja I_i in J_j sta neodvisna, ker sta neodvisna ustrezna dogodka, zato je $\operatorname{cov}(I_i, J_j) = 0$. Torej je tudi $\operatorname{cov}(W, S) = 0$.

c. (5) Sta slučajni spremenljivki W in S neodvisni?

Rešitev: Ne. Velja namreč $\{S = n\} \subseteq \{W = 0\}$, torej je $P(S = n, W = 0) = P(S = n) = 6^{-n}$, medtem ko je $P(S = n)\, P(W = 0) < 6^{-n}$, saj je $P(W = 0) < 1$.

5. (20) Naj bo $0 < a, b < 1$. Slučajna spremenljivka N naj bo porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(a)$. Nadalje naj bo K slučajna spremenljivka, ki je pogojno na $N = n$ porazdeljena negativno binomsko $\mathrm{NegBin}(n, b)$. Držimo se naslednjih dogovorov:

- Slučajna spremenljivka N je porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(p)$, če za $n = 1, 2, 3, \ldots$ velja $P(N = n) = p(1-p)^{n-1}$.
- Slučajna spremenljivka X je porazdeljena negativno binomsko $\mathrm{NegBin}(n, p)$, če za $k = n, n+1, n+2, \ldots$ velja $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

a. (10) Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke K.

Rešitev: Po predpostavki za $k = n, n+1, n+2, \ldots$ velja

$$P(N = n) = a(1-a)^{n-1}\,; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$P(K = k | N = n) = \binom{k-1}{n-1} b^n (1-b)^{k-n}\,; \qquad k = n, n+1, n+2, \ldots$$

Po izreku o popolni verjetnosti je

$$\begin{aligned} P(K = k) &= \sum_n P(N = n)\, P(K = k | N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{k} \binom{k-1}{n-1} a(1-a)^{n-1} b^n (1-b)^{k-n} \\ &= ab \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1-a)^l b^l (1-b)^{k-l-1} \\ &= ab(1-ab)^{k-1}\,. \end{aligned}$$

Slučajna spremenljivka K je torej porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(ab)$.

b. (10) Za vse $k = 1, 2, 3, \ldots$ določite pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke $N - 1$ glede na $K = k$.

Rešitev: Pogojno na $K = k$ lahko slučajna spremenljivka N zavzame vrednosti iz množice $\{1, 2, \ldots k\}$, torej lahko $N - 1$ zavzame vrednosti iz množice $\{0, 1, \ldots k - 1\}$. Za l iz te množice velja

$$\begin{aligned} P(N - 1 = l | K = k) &= P(N = l + 1 | K = k) \\ &= \frac{P(N = l+1)\, P(K = n | N = l+1)}{P(K = k)} \\ &= \binom{k-1}{l} \frac{(1-a)^l b^l (1-b)^{k-l-1}}{(1-ab)^l} \\ &= \binom{k-1}{l} \left(\frac{(1-a)b}{1-ab} \right)^l \left(\frac{1-b}{1-ab} \right)^{k-1-l}\,. \end{aligned}$$

Od tod zaključimo, da je slučajna spremenljivka $N-1$ *pogojno na* $K=k$ *porazdeljena binomsko* $\mathrm{Bin}\big(k-1, \frac{(1-a)b}{1-ab}\big)$.

6. (20) Igralni avtomati imajo 3 kolesa s po 7 simboli. Ko potegnemo ročico, se kolesa ustavijo neodvisno eno od drugega, simboli na posameznih kolesih pa so enako verjetni. Stavimo vedno 1 enoto. Če se ujemajo vsi trije simboli, nam igralni avtomat vrne stavo in še 4 enote. Če se ujemata samo dva simbola, nam avtomat vrne stavo in še eno enoto. V vseh ostalih primerih stavo izgubimo.

a. (10) Naj bo X_1 čisti dobiček v eni igri, ki je lahko 4 enote, 1 enoto ali -1 enoto. Izračunajte $E(X_1)$ in $\mathrm{var}(X_1)$.

Rešitev: Naj bo X_1 čisti dobiček v prvi igri. Iz besedila razberemo, da je

$$P(X_1 = 4) = 1/49, \quad P(X_1 = 1) = \frac{18}{49} \quad \textit{in} \quad P(X_1 = -1) = \frac{30}{49}\,.$$

Sledi

$$E(X_1) = -\frac{8}{49} = -0,1633 \qquad \textit{in} \qquad \mathrm{var}(X_1) = \frac{64}{49} - \frac{64}{49^2} = 1,2795\,.$$

b. (10) Izračunajte približno verjetnost, da bo po $n = 1000$ igrah izguba 150 enot ali manj. Privzemite, da imamo dovolj enot, da le teh med igro ne zmanjka.

Rešitev: Označimo $S_{1000} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}$. Po centralnem limitnem izreku velja

$$\begin{aligned} P(S_{1000} \geq -150) &= P\left(\frac{S_{1000} - 1000 \cdot E(X_1)}{\sqrt{1000 \cdot \mathrm{var}(X_1)}} \geq \frac{-150 - 1000 \cdot E(X_1)}{\sqrt{1000 \cdot \mathrm{var}(X_1)}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 0,37) \\ &= 0.36\,. \end{aligned}$$