Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

1. kolokvij

6. maj 2016

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 12o minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.				•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Dan je dobro premešan kup standardnih 52 kart (kar pomeni, da imajo štiri možne enako zastopane *barve* – pik, križ, srce in karo). Štirje igralci dobijo vsak po štiri karte z vrha kupa kart.

a, (10) Označimo z A dogodek, da je vsak izmed igralcev brez vsaj ene barve. Nadalje za vsak $k = 1, 2, 3, 4$ označimo z B_k dogodek, da ima k-ti igralec vse štiri barve. Izrazite dogodek A z dogodki B_k za $k = 1, 2, 3, 4$.

b. (10) Kolikšna je verjetnost, da vsak izmed njih brez vsaj ene barve? Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Označimo z A dogodek, da je vsak izmed igralcev brez vsaj ene barve. Nadalje za vsak $k = 1, 2, 3, 4$ označimo z B_k dogodek, da ima k-ti igralec vse štiri barve. Tedaj velja:

$$A = B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c \cap B_4^c = (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)^c\,.$$

Za izračun verjetnosti uporabimo načelo vključitev in izključitev:

$$\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \\
&= 1 - P(B_1) - P(B_2) - P(B_3) - P(B_4) \\
&\qquad + P(B_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_4) \\
&\qquad + P(B_2 \cap B_3) + P(B_2 \cap B_4) + P(B_3 \cap B_4) \\
&\qquad - P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) - P(B_1 \cap B_2 \cap B_4) \\
&\qquad - P(B_1 \cap B_3 \cap B_4) + P(B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\
&\qquad + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\
&= 1 - 4 \cdot \frac{13^4}{\binom{52}{4}} + 6 \cdot \frac{13^4 \cdot 12^4}{\binom{52}{4}\binom{48}{4}} - 4 \cdot \frac{13^4 \cdot 12^4 \cdot 11^4}{\binom{52}{4}\binom{48}{4}\binom{44}{4}} + \frac{13^4 \cdot 12^4 \cdot 11^4 \cdot 10^4}{\binom{52}{4}\binom{48}{4}\binom{44}{4}\binom{40}{4}} \\
&\doteq 0{,}6407\,.
\end{aligned}$$

2. (20) Naj bo $0 \leq p \leq 1$. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-p)}{x^2} + \dfrac{2p}{x^3} & ; x > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

a. (10) Določite kumulativno porazdelitveno funkcijo te slučajne spremenljivke.

Rešitev: $F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{(1-p)}{x} - \dfrac{p}{x^2} & ; x \geq 1 \end{cases} .$

b. (10) Naj za števili x in y velja

$$F_X(x) = \frac{7}{10} \qquad \text{in} \qquad F_X(y) = \frac{9}{10} .$$

Določite parameter p tako, da bo $y = 2x$.

Rešitev: Če s q označimo sedmi decil, mora zaradi zveznosti porazdelitve in pozitivnosti gostote veljati $F(q) = 7/10$ in $F(2q) = 9/10$. Dobimo sistem enačb:

$$\frac{1-p}{q} + \frac{p}{q^2} = \frac{3}{10} ,$$
$$\frac{1-p}{2q} + \frac{p}{4q^2} = \frac{1}{10} .$$

Če od štirikratnika druge enačbe odštejemo prvo, dobimo $(1-p)/q = 1/10$, torej $q = 10(1-p)$. Ko to zvezo vstavimo v eno od enačb, po krajšem računu dobimo $20p^2 - 41p + 20 = 0$, kar ima rešitvi $p_1 = 4/5$ in $p_2 = 5/4$. Toda za $p = 5/4$ bi bilo $F(x) > 1$ za vse $x > 5$, torej to ne pride v poštev. Za $p = 4/5$ pa dobimo sedmi decil $q = 2$ in deveti decil $2q = 4$.

3. (20) Dan je dobro premešan kup n kart, med katerimi je $r \geq 1$ rdečih, preostale pa so črne. Za $k = 1, 2, \ldots, r-1$ označimo s ξ_k število črnih kart, ki se nahajajo med k-to in $(k+1)$-to rdečo karto, gledano z vrha navzdol; ξ_0 naj označuje število črnih kart nad prvo rdečo, ξ_r pa število črnih kart pod zadnjo rdečo karto.

a. (10) Določite porazdelitev slučajnega vektorja $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r)$.

Namig: če naj bo $\xi_0 = j_0, \xi_1 = j_1, \ldots, \xi_r = j_r$, je s tem natanko določeno, v kakšnem vrstnem redu se morata pojaviti barvi.

Rešitev: Dani slučajni vektor lahko zavzame vrednosti na vseh $(r+1)$-tericah $(j_0, j_1, \ldots, j_r)$ nenegativnih celih števil z $j_0 + j_1 + \cdots + j_r = n - r$; recimo jim dopustne. *Dopustne $(r+1)$-terice pa so v bijektivni korespondenci z razporeditvami r rdečih in $n-r$ črnih neoznačenih kart v kup. Te razporeditve so vse enako verjetne in jih je $\binom{n}{r}$. Torej za vsako dopustno $(r+1)$-terico $(j_0, j_1, \ldots, j_r)$ velja*

$$P(\xi_0 = j_0, \xi_1 = j_1, \ldots, \xi_r = j_r) = \frac{1}{\binom{n}{r}} = \frac{r!\,(n-r)!}{n!}\,.$$

b. (5) Določite robne porazdelitve.

Namig: računajte naravnost brez formul za robne porazdelitve.

Rešitev: Posamezna slučajna spremenljivka ξ_k lahko zavzame vrednosti $0, 1, \ldots, n-r$. Vse možne razporeditve rdečih in črnih kart, pri katerih je $\xi_k = j$, lahko dobimo tako, da vzamemo razporeditve $r-1$ rdečih in $n-r-j$ črnih kart, nakar pod k-to rdečo karto vrinemo j črnih in še eno rdečo karto; pri $k = 0$ te karte dodamo na vrh, pri $k = r+1$ pa na dno dodamo najprej rdečo, nato pa še k črnih kart. Vseh razporeditev, pri katerih je $\xi_k = j$, je torej $\binom{n-j-1}{r-1}$. Sledi

$$P(\xi_k = j) = \frac{\binom{n-j-1}{r-1}}{\binom{n}{r}} = r\,\frac{(n-r)!}{n!}\,\frac{(n-j-1)!}{(n-j-r)!}\,.$$

c. (5) So slučajne spremenljivke $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r$ neodvisne?

Rešitev: Slučajne spremenljivke so vselej odvisne, saj je npr. $P(\xi_0 = n-r, \xi_1 = n-r) = 0$, medtem ko je $P(\xi_0 = n-r)\,P(\xi_1 = n-r) = 1/\binom{n}{r}^2 > 0$.

4. (20) Za okroglo mizo s stoli oštevilčenimi od 1 do $n = b + r$ naključno posedemo b belih in r rdečih vitezov, tako da so vsi vrstni redi enako verjetni. Naj bo X število belih vitezov za mizo, ki imajo na svoji desni belega viteza.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da na stolih k in $k+1$ sedita bela viteza. Če je $k = n$ interpretiramo $k + 1$ kot 1.

Rešitev: Ker so vsi vrstni redi enako verjetni, bosta viteza na k-tem in $(k + 1)$-tem stolu naključno izbrana izmed vseh vitezov.. Verjetnost, da bosta oba bela, je

$$\frac{\binom{b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)} \,.$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Stole za mizo lahko oštevilčimo v smeri, nasprotni urinemu kazalcu. Označimo $n = b + r$ in definirajmo indikatorje

$$I_k = \begin{cases} 1\,, & \textit{če na } k\textit{-tem } (k+1)\textit{-tem stolu sedita bela viteza.} \\ 0\,, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Pri tem razumemo stol z indeksom $n + 1$ kot stol 1. S to definicijo je $X = \sum_{k=1}^{n} I_k$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(I_k) = \frac{b(b-1)}{n-1} = \frac{b(b-1)}{b+r-1} \,.$$

5. (20) Naj bo $f(x)$ gostota porazdelitve neke slučajne spremenljivke, $F(x)$ pa njena porazdelitvena funkcija. Predpostavimo, da je $f(x)$ odsekoma zvezna. Slučajni spremenljivki X in Y naj imata za nek $n \geq 2$ gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} n(n-1)\left(F(y)-F(x)\right)^{n-2} f(x)f(y) & \text{za } x < y \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

a. (10) Izračunajte gostoti slučajnih spremenljivk X in Y.

Namig: upoštevajte, da je

$$\frac{d}{dx}\left[\left(F(y)-F(x)\right)^{n-1}\right] = -(n-1)\left(F(y)-F(x)\right)^{n-2} f(x)\,.$$

Rešitev: Iz namiga sledi

$$-\int (n-1)\left(F(y)-F(x)\right)^{n-2} f(x)dx = \left(F(y)-F(x)\right)^{n-1},$$

torej lahko računamo

$$\begin{array}{rcl} f_Y(y) & = & \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)dx \\ & = & -nf(y)\left(F(y)-F(x)\right)^{n-1}\Big|_{x=-\infty}^{x=y} \\ & = & nf(y)(F(y))^{n-1}, \end{array}$$

kjer upoštevamo, da za porazdelitveno funkcijo velja

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

Podobno kot v namigu velja tudi

$$\frac{d}{dy}\left[\left(F(y)-F(x)\right)^{n-1}\right] = (n-1)\left(F(y)-F(x)\right)^{n-2} f(y)\,.$$

Torej lahko računamo

$$\begin{array}{rcl} f_X(x) & = & \int_{x}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\ & = & nf(x)\left(F(y)-F(x)\right)^{n-1}\Big|_{y=x}^{y=\infty} \\ & = & nf(x)\left(1-F(x)\right)^{n-1}, \end{array}$$

kjer upoštevamo, da za porazdelitveno funkcijo velja

$$\lim_{y\to\infty} F(y) = 1.$$

b. (10) Izračunajte verjetnost

$$P\,(Y - X \geq z)$$

za $z > 0$ v primeru, če je $f(x) = e^{-x}$ za $x > 0$ in $f(x) = 0$ sicer.

Rešitev: Ker $f(t) = e^{-t}$ za $t > 0$, velja

$$\begin{aligned} F(x) &= \textstyle\int_0^x f(t)dt \\ &= \textstyle\int_0^x e^{-t}dt \\ &= -e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

Računamo

$$\begin{aligned} P(Y - X \geq z) &= P(Y \geq X + z) \\ &= \textstyle\int_0^\infty \int_{x+z}^\infty f_{X,Y}(x,y)dydx \\ &= \textstyle\int_0^\infty nf(x)\,(F(y) - F(x))^{n-1}\,\Big|_{y=\infty}^{y=x+z} dx \\ &= \textstyle\int_0^\infty nf(x)\Big[\,(1 - F(x))^{n-1} - (F(x+z) - F(x))^{n-1}\Big]dx \\ &= \textstyle\int_0^\infty nf(x)\Big[\,(1 - F(x))^{n-1} - (F(x+z) - F(x))^{n-1}\Big]dx \\ &= \textstyle\int_0^\infty ne^{-x}\Big[\,(1 + e^{-x} - 1)^{n-1} - (-e^{-x-z} + 1 + e^{-x} - 1)^{n-1}\Big]dx \\ &= \textstyle\int_0^\infty n\Big[e^{-nx} - e^{-nx}(-e^{-z} + 1)^{n-1}\Big]dx \\ &= n\Big[\tfrac{e^{-nx}}{-n} - \tfrac{e^{-nx}}{-n}(1 - e^{-z})^{n-1}\Big]\Big|_{x=0}^{x=\infty} \\ &= 1 - (1 - e^{-z})^{n-1} \end{aligned}$$

6. (20) Pošten kovanec mečemo, dokler ne padeta dve zaporedni številki. Meti so med seboj neodvisni. Označimo z N število potrebnih metov.

a. (10) Izrazite verjetnosti $P(N = n)$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, s Fibonaccijevim zaporedjem $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Namig: pogojujte na prva dva meta in si oglejte, kakšni rekurzivni formuli ustreza zaporedje $a_n = 2^n P(N = n)$.

Rešitev: Dogodek $\{N = 2\}$ se ujema z dogodkom, da je v prvem in drugem metu padla številka. Dogodek $\{N = 3\}$ se ujema z dogodkom, da je v prvem metu padel grb, v drugem in tretjem metu pa številka. Sledi

$$P(N = 2) = \frac{1}{4}\,, \qquad P(N = 3) = \frac{1}{8}\,.$$

Za $n = 3, 4, \ldots$ pa dogodek $\{N = n\}$ razdelimo na dva poddogodka:

- *V prvem metu pade grb, nato pa potrebujemo še natanko $n - 1$ metov, da padeta dve zaporedni številki.*
- *V prvem metu pade številka, v drugem grb, nato pa potrebujemo še natanko $n - 2$ metov, da padeta dve zaporedni številki.*

Od tod dobimo rekurzivno formulo

$$P(N = n) = \frac{P(N = n - 1)}{2} + \frac{P(N = n - 2)}{4}\,.$$

Zaporedje $a_n := 2^n\, P(N = n)$ torej zadošča rekurzivni zvezi

$$a_2 = a_3 = 1\,, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,,$$

od koder dobimo, da je $a_n = F_{n-1}$ oziroma $P(N = n) = \dfrac{F_{n-1}}{2^n}$.

b. (5) Izrazite s Fibonaccijevim zaporedjem še repne verjetnosti $P(N > n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Namig: rešujte na podoben način kot prejšnjo točko in neodvisno od nje.

Rešitev: Dogodek $\{N > 1\}$ je gotov, dogodek $\{N > 2\}$ pa se ujema z dogodkom, da je prvem in drugem metu nista padli zaporedni številki. Sledi

$$P(N > 1) = 1\,, \qquad P(N > 2) = \frac{3}{4}\,.$$

Za $n = 4, 5, \ldots$ pa dogodek $\{N = n\}$ razdelimo na dva poddogodka:

- *V prvem metu pade grb in v nadaljnjih $n-1$ metih ne padeta dve zaporedni številki.*
- *V prvem metu pade številka, v drugem grb in v nadaljnjih $n-2$ metih ne padeta dve zaporedni številki.*

Od tod dobimo rekurzivno formulo

$$P(N > n) = \frac{P(N > n-1)}{2} + \frac{P(N > n-2)}{4}.$$

Zaporedje $b_n := 2^n\, P(N = n)$ torej zadošča rekurzivni zvezi

$$b_1 = 2\,, \qquad b_2 = 3\,, \qquad b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\,,$$

od koder dobimo, da je $b_n = F_{n+2}$ oziroma $P(N > n) = \dfrac{F_{n+2}}{2^n}$.

c. (5) Izračunajte $E(N)$.

Rešitev:

Prvi način. *Definirajmo naslednje tri hipoteze:*

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\textit{v prvem metu pade grb}\}\,. \\ H_2 &= \{\textit{v prvem metu pade številka, v drugem pa grb}\}\,. \\ H_3 &= \{\textit{v prvih dveh metih pade številka}\}\,. \end{aligned}$$

Če se zgodi H_3, je očitno $N = 2$ in torej tudi $E(N \mid H_3) = 2$. Če pa se zgodita H_1 ali H_2, je nadaljnje dogajanje spet zaporedje neodvisnih metov kovanca, zato je $E(N \mid H_1) = 1 + E(N)$ in $E(N \mid H_2) = 2 + E(N)$. Sledi:

$$E(N) = \frac{1}{2}\big(1 + E(N)\big) + \frac{1}{4}\big(2 + E(N)\big) + \frac{1}{4} \cdot 2\,,$$

od koder dobimo $E(N) = 6$.

Drugi način. *Uporabimo formulo*

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N > n)$$

in opazimo, da je $P(N > n) = 8\, P(N = n+3)$ za vse $n = 0, 1, 2, \ldots$ Sledi

$$E(N) = 8 \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n+3) = 8\, P(N > 1) = 6\,.$$