Univerza na Primorskem

FAMNIT, Oddelek za matematiko

Verjetnost

2. kolokvij

6. junij 2017

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	
1.			•	
2.			•	
3.			•	
4.			•	
5.			•	
6.			•	
Skupaj				

1. (20) Kovanec mečemo tolikokrat, dokler ne dobimo ali natanko r grbov ali natanko s številk. Označite število potrebnih metov z $X_{r,s}$. Naj bo $P(G) = 1/2$ in predpostavite, da so meti med seboj neodvisni.

a. (10) Izračunajte $E(X_{1,s})$.

Namig: Lahko upoštevate, da za nenegativno celoštevilsko slučajno spremeljivko X *velja*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)\,.$$

Druga možnost je, da uporabite

$$\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{(an-n-1)a^{n+1}+a}{(1-a)^2}\,.$$

Rešitev: Dogodek $\{X_{1,s} \geq k\}$ *za* $k = 1, 2, \ldots, s$ *se bo zgodil natanko takrat, ko bodo na mestih* $1, 2, \ldots, k-1$ *same številke. Torej je* $P(X_{1,s} \geq k) = 2^{-(k-1)}$ *za* $k = 1, \ldots, s$ *in* $P(X_{1,s} \geq k) = 0$ *za* $k \geq s+1$*. Sledi*

$$\begin{aligned} E(X_{1,s}) &= \sum_{k=1}^{s} P(X_{1,s} \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{s} 2^{-(k-1)} \\ &= 2(1-2^{-s})\,. \end{aligned}$$

b. (10) Pokažite

$$E(X_{r,r}) = 2r\left(1 - \binom{2r}{r} 2^{-2r}\right)\,.$$

Namig: $\sum_{k=r+1}^{2r+1} P(X_{r+1,r+1} = k) = 1$.

Rešitev: Z uporabo negativne binomske porazdelitve dobimo

$$P(X_{r,r} = k) = 2\binom{k-1}{r-1}2^{-k}$$

za $k = r, r+1, \ldots, 2r-1$. Torej je

$$\begin{aligned}
E(X_{r,r}) &= 2\sum_{k=r}^{2r-1} k \cdot \binom{k-1}{r-1} 2^{-k} \\
&= 2r \sum_{k=r}^{2r-1} \binom{k}{r} 2^{-k} \\
&= 2r \sum_{k=r+1}^{2r} \binom{k-1}{r} 2^{-(k-1)} \\
&= 2r \left[2 \sum_{k=r+1}^{2r+1} \binom{k-1}{r} 2^{-k} - \binom{2r}{r} 2^{-2r} \right] \\
&= 2r \left[1 - \binom{2r}{r} 2^{-2r} \right] .
\end{aligned}$$

Prva vsota v oklepaju je enaka 1, ker je vsota verjetnosti v porazdelitvi.

2. (20) Igralca A in B imata vsak standarden kup 52 kart. Oba igralca kup dobro in neodvisno eden od drugega premešata in hkrati začneta polagati karte na mizo eno po eno z vrha svojega kupa.

a. (10) Naj bo X število polaganj kart, ko igralca A in B na mizo hkrati položita asa. Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Definirajmo indikatorje

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če na } k\textit{-tem polaganju oba igralca na mizo položita asa,} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

S to definicijo je $X = I_1 + \cdots + I_{52}$. *Zaradi simetrije imajo vsi indikatorji enako pričakovano vrednost, zato je*

$$E(X) = 52 \cdot E(I_1) = 52 \cdot P(I_1 = 1) = 52 \cdot \left(\frac{4}{52}\right)^2 .$$

b. (10) Naj bo Y število asov, ki jih ima v preostalem kupu igralec B po vključno polaganju, ko igralec A prvič na mizo položi asa. Naj bo N polaganje kart, ko A prvič na mizo položi asa. Kot znano privzemite, da je $E(N) = \frac{53}{5}$. Izračunajte $E(Y)$.

Namig: za nenegativno celoštevilsko slučajno spremenljivko N *velja formula* $E(N) = \sum_{n \geq 1} P(N \geq n)$.

Rešitev: Definirajmo indikatorje

$$J_k = \begin{cases} 1 & \textit{igralec B na } k\textit{-tem polaganju na mizo položi asa in } N \geq k \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Vsota $J_1 + \cdots + J_{49}$ *je število asov, ki jih bo B položil na mizo do vključno trenutka, ko bo A na mizo položil prvega asa. Sledi, da je* $Y = 4 - J_1 + \cdots + J_{49}$. *Zaradi neodvisnosti in simetrije je*

$$P(J_k = 1) = \frac{4}{52} P(N \geq k) .$$

Sledi, da je

$$E\left(J_1 + \cdots + J_{49}\right) = \frac{4}{52} \sum_{k=1}^{49} P(N \geq k) .$$

Za vsako nenegativno celoštevilsko slučajno spremenljivko N *je*

$$E(N) = \sum_{n \geq 1} P(N \geq n) .$$

Slučajna spremenljivka N ima možne vrednosti $1, 2, \ldots, 49$. Iz zgornje formule sledi, da je

$$\sum_{k=1}^{49} P(N \geq k) = E(N) = \frac{53}{5}\,.$$

Dobimo

$$E\left(J_1 + \cdots + J_{49}\right) = \frac{4}{52} \cdot \frac{53}{5}\,.$$

Končni rezultat je

$$E(Y) = 4 - E\left(J_1 + \cdots + J_{49}\right) = \frac{207}{65}\,.$$

3. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj bosta neodvisni in enako porazdeljeni ter naj velja

$$P(X=k)=\frac{\binom{2k}{k}\beta^k}{4^k(1+\beta)^{k+\frac{1}{2}}}$$

za $k=0,1,\ldots$ in $\beta>0$.

a. (10) Izračunajte porazdelitev vsote $X+Y$.

Namig: prepričajte se, da je

$$\binom{2k}{k}=\frac{4^k\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!}\,,$$

kjer je $(a)_k$ *Pochhammerjev simbol:*

$$(a)_k=a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)\,,\quad (a)_0=1\,.$$

Kot znano potem privzemite, da je

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a)_k\,(b)_{n-k}=(a+b)_n\ .$$

Rešitev: Za $n=0,1,2,\ldots$ *računamo*

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n}P(X=k)P(Y=n-k)\\
&= \frac{\beta^n}{4^n(1+\beta)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\\
&= \frac{\beta^n}{4^n(1+\beta)^{n+1}}\,4^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}\\
&= \frac{\beta^n}{n!(1+\beta)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}\\
&= \frac{\beta^n}{n!(1+\beta)^{n+1}}\,(1)_n\\
&= \frac{\beta^n}{(1+\beta)^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Prepričajte se, da je $X + Y + 1 \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)$, in uporabite rezultat za izračun $\text{var}(X)$.

Rešitev: Trditev o porazdelitvi preverimo naravnost. Vemo, da je varianca slučajne spremenljivke $Z \sim \text{Geom}(p)$ *enaka*

$$\text{var}(Z) = \frac{1-p}{p^2}\,.$$

Torej je

$$\text{var}(X+Y) = \text{var}(X+Y+1) = \beta(1+\beta)\,.$$

Ker je $\text{var}(X) = \text{var}(Y)$ *in je zaradi neodvisnosti*

$$\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)\,,$$

je $\text{var}(X) = \dfrac{\beta(1+\beta)}{2}$.

4. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{za } x,y>0 \text{ in } x+y<1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Kot znano privzemite, da preslikava Φ, dana z

$$\Phi(x,y) = \left(\frac{x}{x+y}, 1-x-y\right)$$

preslika območje $G = \{(x,y)\colon x,y>0 \text{ in } x+y<1\}$ bijektivno na kvadrat $H = (0,1)^2$.

a. (10) Izračunajte gostoto vektorja

$$(U,V) = \left(\frac{X}{X+Y}, 1-X-Y\right).$$

Utemeljite, da sta U in V neodvisni.

Rešitev: Najprej potrebujemo inverz $\Phi^{-1}(u,v)$, kar pomeni, da moramo rešiti enačbi

$$\frac{x}{x+y} = u \quad \mathit{in} \quad 1-x-y=v$$

za $(u,v)\in(0,1)^2$. Dobimo

$$x = x = u(1-v) \quad \mathit{in} \quad y = (1-u)(1-v)\,.$$

Sledi

$$J_{\Phi^{-1}}(u,v) = \det\begin{pmatrix} 1-v & -u \\ -(1-v) & -(1-u) \end{pmatrix} = -(1-v)\,.$$

Po transformacijski formuli je

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 2(1-v) & \mathit{za}\ (u,v)\in(0,1)^2 \\ 0 & \mathit{sicer.} \end{cases}$$

Gostota je produkt členov odvisnih od u (kar je kar 1) in v, torej sta U in V neodvisni.

b. (10) Pokažite, da imajo X, Y in $1-X-Y$ enako gostoto.

Rešitev: Za X in Y iz formule za robne gostote sledi

$$f_X(x) = 2(1-x) \quad \mathit{in} \quad f_Y(y) = 2(1-y)\,.$$

Iz prvega dela naloge sledi, da je gostota $V-1-X-Y$ enaka

$$f_V(v) = 2(1-v)\,.$$

5. (20) Na okensko polico slučajno razporedimo $m > 4$ begonij in $n > 1$ fuksij, vsi vrstni redi pa so enako verjetni. Naj bo X število begonij, ki imajo takoj na svoji desni tudi begonijo.

a. (10) Izrazite X kot vsoto indikatorjev in izračunajte kovariance med njimi.

Rešitev: Oštevilčimo možne pozicije za rože od leve proti desni z $k = 1, 2, \ldots, m+n$. Za $k = 1, 2, m+n-1$ definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če sta na mestih } k \textit{ in } k+1 \textit{ begoniji} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X = I_1 + \cdots + I_{m+n-1}$.

Potrebovali bomo verjetnosti $P(I_k = 1)$, torej verjetnosti, da sta na pozicijah k in $k+1$ begoniji. Ker so vrstni redi enako verjetni, sta na danih pozicijah naključno izbrani roži, kjer so vsi pari enako verjetni. Sledi, da je

$$P(I_k = 1) = \frac{\binom{m}{2}}{\binom{m+n}{2}}$$

Predpostavimo, da je $k \leq m+n-2$ in $l = k+1$. Verjetnost $P(I_k = 1, I_l = 1)$ je enaka verjetnosti, da so na pozicijah $k, k+1, k+2$ begonije. Ker je to naključno izbrana trojica rož, dobimo

$$P(I_k = 1, I_l = 1) = \frac{\binom{m}{3}}{\binom{m+n}{3}}\,.$$

V tem primeru je

$$\operatorname{cov}(I_k, I_l) = \frac{\binom{m}{3}}{\binom{m+n}{3}} - \frac{\binom{m}{2}^2}{\binom{m+n}{2}^2}\,.$$

Če je $l \geq k+2$, je po podobnem razmisleku

$$\operatorname{cov}(I_k, I_l) = \frac{\binom{m}{4}}{\binom{m+n}{4}} - \frac{\binom{m}{2}^2}{\binom{m+n}{2}^2}\,.$$

b. (10) Izrazite $\operatorname{var}(X)$ s količinami $\operatorname{var}(I_1)$, $\operatorname{cov}(I_1, I_2)$ in $\operatorname{cov}(I_1, I_3)$, pri čemer so $I_1, \ldots, I_{m+n-1}$ indikatorji, ki ste jih definirali. Dobljenih izrazov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Uporabimo običajno formulo

$$\operatorname{var}(X) = \sum_{k=1}^{m+n-1} \operatorname{var}(I_k) + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq m+n-1} \operatorname{cov}(I_k, I_l)\,.$$

Vse variance so enake $P(I_k = 1)(1 - P(I_k = 1))$ *in jih je* $m + n - 1$*. Prešteti moramo še, koliko je različnih kovarianc. Prepišemo lahko*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1 \le k < l \le m+n-1} \operatorname{cov}(I_k, I_l) \\
&= \sum_{k=1}^{m+n-2} \sum_{l=k+1}^{m+n-1} \operatorname{cov}(I_k, I_l) \\
&= \sum_{k=1}^{m+n-2} \left[\operatorname{cov}(I_k, I_{k+1}) + (m+n-k-1)\operatorname{cov}(I_k, I_{k+2})\right] \\
&= (m+n-2)\operatorname{cov}(I_1, I_2) + \operatorname{cov}(I_1, I_3) \cdot \sum_{k=1}^{m+n-2} (m+n-k-1) \\
&= (m+n-2)\operatorname{cov}(I_1, I_2) + \operatorname{cov}(I_1, I_3) \cdot (1 + 2 + \cdots + (m+n-2)) \\
&= (m+n-2)\operatorname{cov}(I_1, I_2) + \operatorname{cov}(I_1, I_3) \cdot \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= (m+n-1)\operatorname{var}(I_1) + 2(m+n-2)\operatorname{cov}(I_1, I_2) \\
&\quad + (m+n-2)(m+n-1)\operatorname{cov}(I_1, I_3)\,.
\end{aligned}
$$

6. (20) Iz množice vseh permutacij n elementov izberemo naključno permutacijo π, pri čemer so vse permutacije enako verjetne. Par (i, j) z $i < j$ je *inverzija*, če velja $\pi(i) > \pi(j)$. Naj bo X število vseh inverzij v slučajni permutaciji Π.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Naj bo $S = \{(i, j) \colon 1 \leq i < j \leq n\}$ množica vseh urejenih parov števil manjših od n. Označimo z I_s indikator dogodka, da je par $s \in S$ inverzija. Po simetriji dobimo, da je $P(I_s = 1) = 1/2$. Ker je $X = \sum_{s \in S} I_s$, je

$$E(X) = \sum_{s \in S} E(I_s) = \frac{n(n-1)}{4}\,,$$

ker je parov $n(n-1)/2$.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: Velja, da je

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{s \in S} \mathrm{var}(I_s) + \sum_{\substack{s,t \in S \\ s \neq t}} \mathrm{cov}(I_s, I_t)\,.$$

Označimo $s = (i, j)$ in $t = (k, l)$. Za kovariance dobimo več različnih možnosti: prva je $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$. V tem primeru je po simetriji $P(I_s = 1, I_t = 1) = 1/4$ in posledično $\mathrm{cov}(I_s, I_t) = 0$. Druga možnost je $i = k < j < l$. Po simetriji je v tem primeru $P(I_s = 1, I_t = 1) = 1/3$ in posledično $\mathrm{cov}(I_s, I_t) = 1/12$. Tretja možnost je $i < j = k < l$. Po simetriji velja $P(I_s = 1, I_t = 1) = 1/6$ in posledično $\mathrm{cov}(I_s, I_t) = -1/12$. Četrta možnost je $i < k < j = l$ z enako kovarianco kot v drugem primeru.

Ostane še preštevanje sumandov v vsoti kovarianc. Vsako od možnih treh od nič različnih kovarianc dobimo na $2\binom{n}{3}$ načinov. Sledi

$$\mathrm{var}(X) = \frac{n(n-1)}{8} + 2\binom{n}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}\,.$$