UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAMNIT, ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

2. KOLOKVIJ

8. JUNIJ 2015

IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: [| | | | | | |]

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 12o minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	
1.			•	
2.			•	
3.			•	
4.			•	
5.			•	
6.			•	
Skupaj				

1. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2x}}$$

za $x > 0$, $-\infty < y < \infty$.

a. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke

$$Z = \frac{Y - X}{\sqrt{X}}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq z\right) &= \iint_{(y-x)/\sqrt{x} \leq z} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= \int_0^\infty e^{-x}dx \int_{y \leq x + \sqrt{x}z} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2x}}dy \\ &= \int_0^\infty e^{-x}dx \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}du \\ &= \Phi(z)\,. \end{aligned}$$

Tukaj je $\Phi(z)$ *porazdelitvena funkcija standardizirano normalne porazdelitve. Sledi* $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

b. (10) Utemeljite, da sta slučajni spremenljivki X in

$$Z = \frac{Y - X}{\sqrt{X}}$$

neodvisni.

Namig: Kaj je $f_{Z|X=x}(z)$*?*

Rešitev: Pri pogoju $X = x$ *je pogojna gostota* Y *enaka gostoti* $\mathrm{N}(x,x)$ *porazdelitve. Slučajna spremenljivka* Z *je linearna funkcija* Y*, tako da je njena pogojna gostota enaka gostoti* $\mathrm{N}(0,1)$ *porazdelitve. Ker je pogojna gostota neodvisna od* x*, neodvisnost sledi.*

2. (20) Slučajna spremenljivka X naj ima vrednosti $k = 2, 3, \ldots$ in porazdelitev dano z

$$P(X = k) = (k-1)p^2 q^{k-2}$$

za $p \in (0,1)$ in $q = 1 - p$. Za slučajno spremenljivko Y naj velja $P(Y = l | X = k) = 1/(k-1)$ za $l = 1, 2, \ldots, k-1$.

a. (10) Izračunajte porazdelitev Y.

Rešitev: Po formuli za popolno verjetnost je

$$\begin{aligned}
P(Y = l) &= \sum_{k=2}^{\infty} P(Y = l | X = k) P(X = k) \\
&= \sum_{k=l+1}^{\infty} P(Y = l | X = k) P(X = k) \\
&= \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{k-1} \cdot (k-1) p^2 q^{k-2} \\
&= p^2 q^{l-1} \sum_{i=0}^{\infty} q^i \\
&= q^{l-1} p\,.
\end{aligned}$$

Sledi $Y \sim \mathrm{Geom}(p)$.

b. (10) Pokažite, da sta slučajni spremenljivki Y in $Z = X - Y$ neodvisni.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
P(Y = l, Z = m) &= P(Y = l, X = l + m) \\
&= P(Y = l | X = l + m) P(X = l + m) \\
&= \frac{1}{l + m - 1} \cdot (l + m - 1) p^2 q^{l+m-2} \\
&= q^{l-1} p \cdot q^{m-1} p\,.
\end{aligned}$$

Ker je $P(Y = l, Z = m) = f(l) g(m)$, *sta slučajni spremenljivki neodvisni.*

3. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2x}}$$

za $x > 0$, $-\infty < y < \infty$ in $n \geq 3$.

a. (10) Izračunajte

$$E\left(\frac{Y^2}{X^2}\right).$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y^2}{X^2}\right) &= \iint_{(0,\infty)\times\mathbb{R}} \frac{y^2}{x^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{x^2} e^{-x} dx \int_{-\infty}^\infty y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2x}} dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty (x+x^2) x^{n-3} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{n-1} + 1\,. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je notranji integral enak $E(U^2)$ *za* $U \sim \mathrm{N}(x,x)$ *porazdelitve, kar je* $x + x^2$. *Za ostale račune uporabimo* Γ *funkcijo.*

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(Y)$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} E(Y) &= \iint_{(0,\infty)\times\mathbb{R}} y f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \int_{-\infty}^\infty y \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2x}} dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^n e^{-x} dx \\ &= n\,. \end{aligned}$$

Računamo

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \iint_{(0,\infty)\times\mathbb{R}} y^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \int_{-\infty}^\infty y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2x}}dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1}(x+x^2)e^{-x}dx \\
&= n + n(n+1)\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\operatorname{var}(Y) = 2n\,.$$

4. (20) Pri igri *Črni Peter* imamo n parov kart. Karti v vsakem paru sta enaki. Predpostavite, da imamo m igralcev in je m delitelj števila $2n$. Označite $2n/m = a$. Karte dobro premešamo in jih razdelimo m igralcem, tako da vsak dobi a kart. Za $k = 1, 2, \ldots, m$ naj bo X_k število parov, ki jih dobi igralec k .

a. (10) Izračunajte $E(X_k)$.

Namig: definirajte indikatorje

$$I_{k,l} = \begin{cases} 1 & \textit{če igralec } k \textit{ ima } l\textit{-ti par} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Rešitev: Velja $X_k = I_{k,1} + \cdots + I_{k,n}$, torej je dovolj izračunati $E(I_{k,l}) = P(k$-ti igralec ima l-ti par$)$. Karti iz l-tega para, ki ju ločimo, imata $2n(2n-1)$ enako verjetnih možnosti za to, na katerih mestih pristaneta. Med njimi je $a(a-1)$ možnosti, pri katerih pristaneta v rokah k-tega igralca. Sledi

$$E(I_{k,1}) = \frac{a(a-1)}{2n(2n-1)}$$

in zaradi linearnosti matematičnega upanja

$$E(X_k) = E(I_{k,1} + \cdots + I_{k,n}) = \frac{na(a-1)}{2(2n-1)} .$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$.

Rešitev: Zaradi bilinearnosti je

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \sum_{i,j} \mathrm{cov}\left(I_{1,i}, I_{2,j}\right) .$$

Za $i = j$ je produkt $I_{1,i}I_{2,i} = 0$, ker igralca ne moreta hkrati dobiti istega para in je tako

$$\mathrm{cov}\left(I_{1,i}, I_{2,i}\right) = -E\left(I_{1,i}\right) E((I_{2,i}) .$$

Za $i \neq j$ so vse kovariance enake. Računamo

$$P(I_{1,i} = 1, I_{2,j} = 1) = \frac{a(a-1)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{a(a-1)}{(2n-2)(2n-3)} .$$

Sledi, da je za $i \neq j$

$$\mathrm{cov}\left(I_{1,i}, I_{2,j}\right) = \frac{a(a-1)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{a(a-1)}{(2n-2)(2n-3)} - \left(\frac{a(a-1)}{2n(2n-1)}\right)^2 .$$

V dvojni vsoti je takih kovarianc $n(n-1)$. Sledi

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = -nE(I_{1,1})^2 + n(n-1)\mathrm{cov}\left(I_{1,1}, I_{2,2}\right) .$$

5. (20) Kovanec mečemo, dokler ne dobimo vzorca GŠG. Meti so neodvisni, verjetnost grba na vsakem metu pa naj bo $p \in (0,1)$. Naj bo Y potrebno število metov, da dobimo vzorec vključno z zadnjimi tremi, X pa naj bo število metov do vključno prve številke.

a. (10) Izrazite $E(Y|X=k)$ s pomočjo $E(Y)$ za vse $k = 1, 2, \ldots$.

Rešitev: Računamo po vrsti. Če je $X = 1$, se čakanje na vzorec začne znova in velja $E(Y|X=1) = 1 + E(Y)$. Za $k \geq 2$ pa imamo že del vzorca GŠ. Na naslednjem metu dobimo G z verjetnostjo p in je $Y = k+1$ ali Š z verjetnostjo $1-p$ in je potem pričakovana vrednost enaka $k+1+E(Y)$. Sledi

$$E(Y|X=k) = (k+1)p + (k+1+E(Y))(1-p) = k+1+(1-p)E(Y)$$

za $k \geq 2$.

b. (10) Izračunajte $E(Y)$.

Rešitev: Vemo, da je $X \sim \mathrm{Geom}(1-p)$. Računamo

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E(Y|X=k)P(X=k) \\
&= (1+E(Y))(1-p) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(k+1+E(Y)(1-p)\right)(1-p)^{k-1}p \\
&= (1+E(Y))(1-p) + \frac{1}{1-p} - (1-p) + (1+(1-p)E(Y))(1-(1-p)) \\
&= (1-p+(1-p)p)E(Y) + \frac{1}{1-p} - 1 + p + p
\end{aligned}$$

Sledi

$$E(Y) = \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{1-p} - 1 + 2p\right).$$

6. (20) Elementi matrike $\mathbf{A}$ velikosti $n \times n$ naj bodo med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke X_{ij} s $P(X_{ij} = 1) = P(X_{ij} = -1) = 1/2$.

a. (10) Naj bosta σ in τ permutaciji n elementov. Izračunajte

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} X_{i\tau(i)}\right) .$$

Rešitev: Zaradi neodvisnosti parov $(X_{1\sigma(1)}, X_{1\tau(1)}), \ldots, (X_{n\sigma(n)}, X_{n\tau(n)})$ *je*

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} X_{i\tau(i)}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(X_{i\sigma(i)} X_{i\tau(i)}\right) .$$

Posamezna pričakovana vrednost $E\left(X_{i\sigma(i)} X_{i\tau(i)}\right)$ *je enaka* 1*, če je* $\sigma(i) = \tau(i)$*, sicer pa je zaradi neodvisnosti enaka* 0*. Celotna pričakovana vrednost je zato enaka* 1*, če je* $\sigma = \tau$*, sicer pa je enaka* 0*.*

b. (10) Izračunajte $\operatorname{var}(\det(\mathbf{A}))$.

Rešitev: Pišimo

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)} .$$

Ker za vsako permutacijo σ *velja*

$$E\big[X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)}\big] = EX_{1\sigma(1)} \cdots EX_{n\sigma(n)} = 0 ,$$

je $E\big[\det(\mathbf{A})\big] = 0$*, zato je*

$$\operatorname{var}(\det(\mathbf{A})) = E\big[(\det(\mathbf{A}))^2\big] = \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau)\, E\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} X_{i\tau(i)}\right) .$$

Toda po prejšnji točki so vsi členi, pri katerih je $\sigma \neq \tau$*, enaki nič, členi, pri katerih je* $\sigma = \tau$*, pa so enaki* 1*. Zato je*

$$\operatorname{var}(\det(\mathbf{A})) = n! .$$