Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

1. kolokvij

6. maj 2016

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Na okensko polico slučajno razporedimo $m > 1$ begonij in $n > 1$ fuksij, vsi vrstni redi so enako verjetni.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo takoj desno od najbolj leve begonije tudi begonija?

   Za popolno rešitev morate odgovor podati v zaključeni obliki, dovoljene operacije pa so le seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje.

   Namig: pri razporeditvah, ki ustrezajo, združite najbolj levi begoniji.

   Rešitev: Vseh možnih razporeditev cvetlic je $\binom{m+n}{m}$. Prešteti moramo razporeditve, pri katerih je takoj desno od najbolj leve begonije tudi begonija. Te so v bijektivni korespondenci z razporeditvami $m-1$ begonij in n fuksij: zahtevane razporeditve dobimo tako, da najbolj levo begonijo podvojimo. Torej je vseh ustreznih razporeditev $\binom{m+n-1}{m-1}$, iskana verjetnost pa je enaka $\frac{m}{m+n}$.

b. (10) Naj bo $k = 1, 2, \ldots, m + n$. Recimo, da je takoj desno od najbolj leve begonije res begonija. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo na k-tem mestu z leve fuksija?

   Za popolno rešitev morate odgovor spet podati v zaključeni obliki, dovoljene operacije pa so seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje in binomski simbol. Upoštevate lahko dogovor, da je $\binom{a}{b} = 0$, brž ko je $a, b \in \mathbb{Z}$ ter $b < 0$ ali $b > a$, vseeno pa morate paziti na robne primere.

   Rešitev: Prešteti moramo razporeditve, pri katerih je takoj desno od najbolj leve begonije tudi begonija, obenem pa je na k-tem mestu fuksija. Te (rekli jim bomo izvirne*) so v bijektivni korespondencami z določenimi razporeditvami $m-1$ begonij in n fuksij (tem bomo rekli* prirejene*):*

   - *V izvirni razporeditvi so do vključno k-tega mesta z leve same fuksije in takoj desno od najbolj leve begonije je tudi begonija. To ustreza prirejenim razporeditvam, kjer so do vključno k-tega mesta z leve same fuksije, teh pa je $\binom{m+n-k-1}{m-1}$. Ob sprejetih dogovorih to velja za vse k.*
   - *V izvirni razporeditvi je na k-tem mestu fuksija, najbolj leva begonija je bolj levo in takoj desno od nje je tudi begonija. To ustreza prirejenim razporeditvam, kjer je na $(k-1)$-tem mestu fuksija, levo od nje pa vsaj ena begonija. Teh razporeditev je $\binom{m+n-2}{m-1} - \binom{m+n-k}{m-1}$, brž ko je $k \geq 2$; za $k = 1$ je njihovo število enako nič, kar ni v skladu s prejšnjo formulo (za $k = 2$ pa je prav tako enako nič, a je v skladu s prejšnjo formulo).*

   Iskana pogojna verjetnost je torej za $k = 1$ enaka

$$\frac{\binom{m+n-2}{m-1}}{\binom{m+n-1}{m-1}} = \frac{n}{m+n-1},$$

za $k = 2, 3, \ldots, m + n$ *pa je enaka*

$$\frac{\binom{m+n-k-1}{m-1} + \binom{m+n-2}{m-1} - \binom{m+n-k}{m-1}}{\binom{m+n-1}{m-1}} = \frac{n}{m+n-1} - \frac{\binom{m+n-k-1}{m-2}}{\binom{m+n-1}{m-1}}\,.$$

2. (20) Igralca A in B imata vsak standarden kup 52 kart. Oba igralca kup dobro in neodvisno eden od drugega premešata in hkrati začneta polagati karte na mizo eno po eno z vrha svojega kupa. Z uporabo formule za vključitve in izključitve izračunajte spodnje verjetnosti.

a. (10) Naj bo C dogodek, da igralca vsaj enkrat hkrati na mizo položita asa. Med 52 standardnimi kartami so 4 asi. Izračunajte verjetnost $P(C)$. Izrazov, ki jih dobite, vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Definirajmo dogodke

$$C_i = \{i\text{-ti karti, ki ju igralca položita na mizo, sta obe as}\}$$

za $i = 1, 2, \ldots, 52$. *Velja* $C = \cup_{i=1}^{52} C_i$. *Uporabimo formulo za vključitve in izključitve, pri čemer opazimo, da so preseki* 5 *ali več različnih dogodkov izmed* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *vedno prazni. Po simetriji imajo tudi vsi preseki* k *različnih dogodkov enako verjetnost. Sledi*

$$\begin{aligned} P(C) &= \binom{52}{1} P(C_1) - \binom{52}{2} P(C_1 \cap C_2) \\ &\quad + \binom{52}{3} P(C_1 \cap c_2 \cap C_3) - \binom{52}{4} P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) \,. \end{aligned}$$

Računamo po vrsti z uporabo neodvisnosti

$$P(C_1) = P\,(\textit{prvi karti igralcev sta asa}) = \left(\frac{4}{52}\right)^2 ,$$

$$P(C_1 \cap C_2) = P\,(\textit{prvi dve karti igralcev sta asa}) = \left(\frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51}\right)^2 ,$$

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P\,(\textit{prve tri karte igralcev so asi}) = \left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{52 \cdot 51 \cdot 50}\right)^2$$

in

$$P(C_1 \cap \cdots \cap C_4) = P\,(\textit{prve štiri karte igralcev so asi}) = \left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}\right)^2 .$$

V skupnem seštevku dobimo

$$P(C) = \frac{15229}{54145} \doteq 0,281263 \,.$$

b. (10) Naj bo D dogodek, da igralca vsaj enkrat hkrati na mizo položita isto karto. Izračunajte verjetnost $P(D)$.

Rešitev: Naloga je popolnoma enaka primeru, ko gre na ples 52 *parov in ob odhodu vsaka ženska v temi naključno izbere moškega. Na predavanjih smo izračunali, da je*

$$P(D) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{52!}\,.$$

Izračunamo in sledi

$$P(D) = \frac{3332398089094688906756940683186552650196823142416430337261808287 83}{52717761549636521942261854154512265996921245386198220800000000000 0} \doteq 0{,}6321\,.$$

3. (20) V posodi naj bo r belih in r črnih kroglic. Kroglice izbiramo zaporedoma, naključno in brez vračanja.

a. (10) Naj bo M število izbiranj dokler ne dobimo prve bele kroglice vključno s prvo belo. Izračunajte $P(M = k)$ za $k = 1, 2, \ldots, r + 1$.

Rešitev: Pred prvo belo moramo dobiti same črne, zato je

$$P(M = k) = \frac{r}{2r} \cdot \frac{r-1}{2r-1} \cdots \frac{r-k+2}{2r-k+2} \cdot \frac{r}{2r-k+1}$$

b. (10) Naj bo N število izbiranj, dokler ne dobimo ali r belih ali r črnih kroglic vključno z zadnjo izbrano kroglico. Pokažite, da je

$$P(N = k) = \frac{2\binom{k-1}{r-1}}{\binom{2r}{r}}$$

za $k = r, r + 1, 2r - 1$.

Rešitev: Zadnja izbrana kroglica je lahko bela ali črna. Če je zadnja bela, moramo vse preostale bele (torej $r - 1$) razporediti na prvih $k - 1$ potegov. Vseh možnosti za razporeditev kroglic pa je $\binom{2r}{r}$.

4. (20) Slučajna spremenljivka X naj ima gostoto

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{3/2}} e^{-\frac{1}{2x}} & \text{za } x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

za neko konstanto c.

a. (10) Pokažite, da je za $x > 0$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 2P\left(Z \geq \frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

kjer je $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Rešitev: Po definiciji je

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x f_X(u)du \\ &= c\int_0^x \frac{1}{u^{3/2}} e^{-\frac{1}{2u}}\, du \\ &= 2c\int_{1/\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv \quad \textit{Nova spremenljivka: } \tfrac{1}{u} = v^2 \\ &= 2c\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1/\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv \\ &= 2c\sqrt{2\pi}\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right). \end{aligned}$$

Pri tem je $\Phi(x)$ porazdelitvena funkcija standardizirane normalne porazdelitve. Ker mora $F_X(x) \to 1$, ko $x \to \infty$, mora veljati

$$2c\sqrt{2\pi}\lim_{x\to\infty}\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = c\sqrt{2\pi} = 1\,.$$

Sledi $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Trditev sledi.

b. (10) Naj bo $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Kakšna je gostota slučajne spremenljivke $Y = \frac{1}{Z^2}$. Izračunajte najprej $P(Y \leq y)$ za $y > 0$.

Rešitev: Velja

$$P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{Z^2} \leq y\right) = 2P\left(Z \geq \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right).$$

Iz tega sledi, da je $F_X(y) = F_Y(y)$, kar pomeni, da imata X in Y enako gostoto.

5. (20) V posodi je b belih in 3 rdeče kroglice. Kroglice iz posode izbiramo naključno po vrsti brez vračanja. Naj bo X število belih kroglic, preden dobimo prvo rdečo kroglico, Y pa število belih kroglic med prvo in drugo rdečo kroglico.

a. (10) Poiščite večrazsežno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Rešitev: Možne vrednosti za slučajni spremenljivki so pari (k, l), za katere velja $k \geq 0$, $l \geq 0$ in $k + l \leq b$. Dogodek $\{X = k, Y = l\}$ se zgodi, če izberemo najprej k belih kroglic, potem rdečo, potem l belih in spet rdečo kroglico. Označimo $b + 3 = n$. Računamo

$$\begin{aligned} & P(X = k, Y = l) = \\ &= \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \cdot \frac{3}{n-k} \cdot \\ &\qquad \cdot \frac{(b-k)(b-k-1)\cdots(b-k-l+1)}{(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-k-l)} \cdot \frac{2}{(n-k-l-1)} \\ &= \frac{b(b-1)\cdots(b-k-l+1)\cdot 3\cdot 2}{n(n-1)\cdots(n-k-l-1)} \\ &= \frac{b!\cdot(n-k-l-2)!\cdot 3\cdot 2}{(b-k-l)!\cdot n!}\,. \end{aligned}$$

b. (10) Pokažite, da imata spremenljivki X in Y enako porazdelitev. Izračunajte porazdelitev Y.

Namig: Porazdelitev X izračunajte posebej, ne kot robno porazdelitev. Nato uporabite simetrijo večrazsežne porazdelitve.

Rešitev: Slučajna spremenljivka X je število belih kroglic do prve rdeče. Dogodek $\{X = k\}$ se zgodi, če dobimo najprej k belih kroglic in nato rdečo. Označimo spet $n = b + 3$. Dobimo

$$P(X = k) = \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)\cdot 3}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}$$

za $k = 0, 1, \ldots, b$. Po drugi strani dobimo porazdelitvi spremenljivk X in Y kot robni porazdelitvi dvorazsežne porazdelitve. Ker je ta porazdelitev simetrična funkcija k in l, morata biti porazdelitvi X in Y enaki. Ker poznamo porazdelitev X, poznamo tudi porazdelitev Y.

6. (20) Anzej, Božo in Cene se gredo 'zemljo krast'. V vsaki igri Anzej zmaga z verjetnostjo a, Božo z verjetnostjo b, Cene pa z verjetnostjo c ($a + b + c = 1$). Igre so med seboj neodvisne, igrajo pa, dokler v dveh ali treh zaporednih igrah dvakrat ne zmaga isti igralec. Zmagovalec zadnje igre je zmagovalec celotnega troboja.

a. (15) Kolikšna je verjetnost, da troboj dobi Anzej, in sicer tako, da zmaga v zadnjih dveh igrah?

   Za popoln odgovor morate rešitev podati v sklenjeni obliki, dovoljene operacije so seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje.

   Namigi:

   - *Glejte od zadnjih treh iger nazaj.*
   - *Posebej obravnavajte primer, ko sta zadnji dve igri tudi edini.*
   - *Recimo, da so bile vsaj štiri igre in da je tretjo igro od zadaj dobil Cene. Kdo je dobil četrto igro od zadaj?*

   Rešitev: Anzej dobi troboj na zahtevani način pri naslednjih zaporedjih zmag:

$$\begin{array}{rr} \multicolumn{2}{c}{AA} \\ C\overline{ABC}AA & B\overline{ACB}AA \\ BC\overline{ABC}AA & CB\overline{ACB}AA \\ ABC\overline{ABC}AA & ACB\overline{ACB}AA \end{array}$$

   Pri tem črta čez zaporedje pomeni, da se lahko to zaporedje pojavi nobenkrat, enkrat ali pa večkrat. Iskana verjetnost je torej:

$$\begin{aligned} & a^2 \left[1 + (c + bc + abc + b + bc + abc) \sum_{n=0}^{\infty} (abc)^n \right] \\ & \quad = a^2 \left[1 + \frac{b + c + 2bc + 2abc}{1 - abc} \right] \\ & \quad = \frac{a^2 \big(1 + b + c + 2bc + abc \big)}{1 - abc} \\ & \quad = \frac{a^2 (2 - a + 2bc + abc)}{1 - abc} \, . \end{aligned}$$

b. (5) Kolikšna je verjetnost, da Anzej dobi troboj na kateri koli način?

   Za popoln odgovor morate rešitev spet podati v sklenjeni obliki, dovoljene operacije so seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje.

Rešitev: Anzej lahko dobi troboj še na naslednje načine:

$$\begin{array}{rr} \overline{ABC}ABA & \overline{ACB}ACA \\ C\overline{ABC}ABA & B\overline{ACB}ACA \\ BC\overline{ABC}ABA & CB\overline{ACB}ACA \end{array}$$

Verjetnost, da dobi troboj tako ali drugače, je torej:

$$\begin{aligned} & a^2\left[\frac{2-a+2bc+abc}{1-abc} + \Big(b(1+c+bc)+c(1+b+bc)\Big)\sum_{n=0}^{\infty}(abc)^n\right] \\ & \quad = \frac{a^2\big(2-a+b+c+bc(4+a+b+c)\big)}{1-abc} \\ & \quad = \frac{a^2(3-2a+5bc)}{1-abc}\,. \end{aligned}$$