Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

1. kolokvij

22. april 2015

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 12o minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Pri igri *Bingo75* dobi igralec kartico s 25 številkami med 1 in 75 kot na spodnji sliki. Na kartici je označen vzorec *Diagonala* s 5 polji. V igri potem naključno izberejo 50 števil med 1 in 75, tako da so vsi nabori 50 števil enako verjetni.

16	10	72	75	2
50	39	34	42	47
48	5	43	40	44
32	57	3	62	4
73	30	19	65	21

Slika 1 Kartica, ki jo lahko dobi igralec.

a. (10) Izrazite verjetnost, da bo pokrit igralčev vzorec, torej da bodo med izbranimi števili vsa števila v vzorcu *Diagonala*. Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Števila po diagonali okličemo za "dobra". Med 50 izbranimi števili morajo biti vseh 5 dobrih in 45 drugih. Ker so vsi izbori enako verjetni, je iskana verjetnost

$$\frac{\binom{70}{45}}{\binom{75}{50}}\,.$$

b. (10) Igralec lahko dobi tudi *Zlato kroglico*, ki lahko nadomesti katerokoli število v vzorcu, ki je še nepokrito. Izračunajte verjetnost, da bo vzorec *Diagonala* pokrit v tem primeru. Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

Namig: naj bo A_i dogodek, da so pokrita vsa števila v vzorcu razen morda i-to po vrsti od leve proti desni. Izrazite dogodek, ki nas zanima, s temi dogodki.

Rešitev: Sledimo namigu. Ker imamo Zlato žogico, je dovolj, da so pokrita štiri števila. Označimo dogodek, ki nas zanima, z A. Velja

$$A = \cup_i A_i\,.$$

Po formuli za vključitve in izključitve je

$$P(A) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \cdots + P(\cap_i A_i)\,.$$

Podobno kot v prvi točki dobimo

$$P(A_i) = \frac{\binom{66}{46}}{\binom{75}{50}} .$$

Opazimo, da so vsi preseki dveh, treh ali več dogodkov A_i kar dogodek, da je pokritih vseh pet števil v vzorcu. Sledi

$$P(A) = 5P(A_1) + P(A_1 \cap A_2) \left(-\binom{5}{2} + \binom{5}{3} - \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \right) .$$

Verjetnost preseka $P(A_1 \cap A_2)$ je izračunana v prvi točki. Sledi

$$P(A) = 5 \cdot \frac{\binom{71}{46}}{\binom{75}{50}} - 4 \cdot \frac{\binom{70}{45}}{\binom{75}{50}} .$$

2. (20) V posodi naj bo r belih in r črnih kroglic. Kroglice izbiramo zaporedoma, naključno in brez vračanja.

a. (10) Naj bo M število izbiranj, dokler ne dobimo prve bele kroglice, vključno s prvo belo. Izračunajte $P(M = k)$ za $k = 1, 2, \ldots, r + 1$.

Rešitev: Predstavljamo si lahko, da so kroglice na $2r$ fiksnih mestih in da vlečemo tako, da najprej izvlečemo kroglico, ki je na prvem mestu, nato tisto na drugem mestu in tako naprej. Pred vlečenjem najprej na mesta razporedimo bele kroglice: to lahko storimo na $\binom{2r}{r}$ enako verjetnih načinov. Na preostala mesta razporedimo črne kroglice, nakar lahko vlečemo.

Dogodek $\{M = k\}$ pomeni razporeditve, pri katerih je ena bela kroglica na k-tem mestu, preostalih $r - 1$ pa je lahko na $2r - k$ možnih mestih (od k-te izvlečene naprej). To lahko storimo na $\binom{2r-k}{r-1}$ načinov. Sklep:

$$P(M = k) = \frac{\binom{2r-k}{r-1}}{\binom{2r}{r}} .$$

b. (10) Naj bo N število izbiranj, dokler ne dobimo ali r belih ali r črnih kroglic, vključno z zadnjo izbrano kroglico. Dokažite, da je

$$P(N = k) = \frac{2\binom{k-1}{r-1}}{\binom{2r}{r}}$$

za $k = r, r + 1, \ldots, 2r - 1$.

Rešitev: Predstavljajmo si, da kroglice razporejamo tako kot v prvi točki. Zadnja izbrana kroglica je lahko bela ali črna. Če je zadnja bela, moramo vse preostale bele (torej $r-1$) razporediti na prvih $k-1$ potegov, za kar imamo $\binom{k-1}{r-1}$ možnosti, vseh pa je, kot že rečeno, $\binom{2r}{r}$.

2. (20) Slučajna spremenljivka X naj ima gostoto $f_X(x)$ definirano kot

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^3}{(1+2x)^6} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

a. (10) Kolikšna mora biti konstanta k?

Rešitev: Integral gostote je enak 1. *Uvedemo novo spremenljivko* $u = 1 + 2x$ *in računamo*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_X(x)\,\mathrm{d}x &= k \int_0^\infty \frac{x^3}{(1+2x)^6}\,\mathrm{d}x \\ &= k \int_1^\infty \frac{(u-1)^3}{2^3 u^6}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{k}{16} \int_1^\infty \left(\frac{1}{u^3} - \frac{3}{u^4} + \frac{3}{u^5} - \frac{1}{u^6} \right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{k}{4} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{k}{320} . \end{aligned}$$

Sledi $k = 320$.

b. (10) Pokažite, da ima spremenljivka Y, definirana kot

$$Y = \frac{2X}{1+2X} ,$$

porazdelitev beta, torej gostoto

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{B(p,q)}\, y^{p-1}(1-y)^{q-1} & ; 0 < y < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

za primerno izbrana p in q.

Rešitev: Računamo za $0 < y < 1$*:*

$$\begin{aligned} P(Y \le y) &= P\left(\frac{2X}{1+2X} \le y \right) \\ &= P\big(2X \le y(1+2X)\big) \\ &= P\big(2X(1-y) \le y\big) \\ &= P\left(X \le \frac{y}{2(1-y)} \right) . \end{aligned}$$

Odvajamo levo in desno stran in sledi

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y}{2(1-y)}\right) \cdot \frac{1}{2(1-y)^2}\,.$$

Poenostavimo in dobimo

$$f_Y(y) = \frac{k}{8}\,y^3\,(1-y)^3 \cdot \frac{1}{2(1-y)^2} = \frac{k}{16}\,y^3\,(1-y) = 20\,y^3\,(1-y)\,.$$

Sledi $p = 4$ *in* $q = 2$.

4. (20) Števila $\{1, 2, \ldots, n\}$ naključno permutiramo, tako da so vse permutacije enako verjetne. Če je π naključno izbrana permutacija, naj bo

$$X = \min\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m)\} \quad \text{in} \quad Y = \max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m)\}$$

za $2 \leq m < n$. Z drugimi besedami je X najmanjša pozicija števil $\{1, 2, \ldots, m\}$ po permutaciji, Y pa največja.

Primer: Če je $n = 8$ in $m = 4$ ter permutacija enaka

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 4 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

je $X = 2$ in $Y = 6$.

a. (10) Navedite možne pare vrednosti (k, l) za slučajni spremenljivki X in Y in izračunajte $P(X = k, Y = l)$.

Rešitev: Možni pari so taki, da je $1 \leq k < l \leq n$ in $l - k \geq m - 1$. Če želimo, da se zgodi dogodek $\{X = k, Y = l\}$, mora biti eno od števil $\{\pi(1), \ldots, \pi(m)\}$ enako k, eno l ostalih $m - 2$ pa mora biti v množici $\{k + 1, k + 2, \ldots, l - 1\}$. Preštejmo, koliko je permutacij, ki ustrezajo zahtevam. Najprej izberimo preostalih $m - 2$ pozicij. To lahko naredimo na $\binom{l-k-1}{m-2}$ načinov. Na izbrane pozicije lahko prvih m števil potaknemo na $m!$ načinov. Ostala števila lahko poljubno permutiramo. Iskano število permutacij je

$$\binom{l-k-1}{m-2} \cdot m! \cdot (n-m)!\,,$$

tako da je iskana verjetnost enaka

$$\frac{\binom{l-k-1}{m-2} \cdot m! \cdot (n-m)!}{n!} = \frac{\binom{l-k-1}{m-2}}{\binom{n}{m}}\,.$$

b. (10) Poiščite porazdelitev $Z = Y - X$.

Rešitev: Možne vrednosti slučajne spremenljivke Z so $r = m - 1, m, \ldots, n - 1$. Računamo

$$\begin{aligned} P(Y - X = r) &= \sum_{j=r+1}^{n} P(X = j - r, Y = j) \\ &= \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\binom{j-(j-r)-1}{m-2}}{\binom{n}{m}} \\ &= (n - r) \cdot \frac{\binom{r-1}{m-2}}{\binom{n}{m}}\,. \end{aligned}$$

5. (20) Števila $\{1, 2, \ldots, n\}$ naključno permutiramo, tako da so vse permutacije enako verjetne. Če je π naključno izbrana permutacija, naj bo

$$X = \min\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m)\}$$

za $m < n$. Z drugimi besedami je X najmanjša pozicija števil $\{1, 2, \ldots, m\}$ po permutaciji.

Primer: Če je $n = 8$ in $m = 4$ ter permutacija enaka

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 4 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

je $X = 2$ in $Y = 6$.

a. (10) Definirajte za $m + 1 \leq j \leq n$

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{če je } \pi(j) < \min\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m)\} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunajte $P(I_j = 1)$.

Namig: če gledate samo števila $\{1, 2, \ldots, m, j\}$, so ta naključno permutirana.

Rešitev: Iz besedila naloge sledi, da je $I_j = 1$, če je v naključni permutaciji množice števil $\{1, 2, \ldots, m, j\}$ število j na prvem mestu. Ker je j z enako verjetnostjo na katerikoli od $m + 1$ pozicij, je

$$P(I_j = 1) = \frac{1}{m + 1}.$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Zapišemo lahko

$$X = 1 + \sum_{j=m+1}^{n} I_j.$$

Sledi

$$E(X) = 1 + \sum_{j=m+1}^{n} E(I_j) = 1 + \frac{n - m}{m + 1}.$$

6. (20) Na 8 mest, ki so razporejena v krogu, neodvisno posadimo ničle in enice, tako da je na vsakem mestu ničla z verjetnostjo 1/2 in enica z verjetnostjo 1/2.

a. (15) Kolikšna je verjetnost, da ne bomo dobili nobenega neprekinjenega zaporedja vsaj petih ničel?

Namig: načelo vključitev in izključitev.

Rešitev: Naj bo A dogodek, da smo dobili zaporedje (vsaj) petih ničel. Velja

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_8 \,,$$

kjer smo oštevilčili zaporedne peterice mest, A_i pa je dogodek, da so v i-ti peterici same ničle. Po načelu vključitev in izključitev je iskana verjetnost enaka

$$P(A^c) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6 - p_7 + p_8 \,,$$

kjer je p_k vsota verjetnosti vseh možnih presekov k različnih dogodkov A_i (vseh možnih naborov je torej $\binom{8}{k}$). Izračunajmo sedaj vrednosti p_k za vsak k posebej.

- *Ker za vsak i velja $P(A_i) = 2^{-5}$, je očitno $p_1 = 8 \cdot 2^{-5} = 1/4$.*
- *Če sta i-ta in j-ta peterica sosedni, je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-6}$; takih neurejenih parov je 8. Če sta zamaknjeni za dve mesti, je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-7}$; takih neurejenih parov je spet 8. Sicer pa je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-8}$; takih neurejenih parov je $\binom{8}{2} - 8 - 8 = 12$. Sledi $p_2 = 8 \cdot 2^{-6} + 8 \cdot 2^{-7} + 12 \cdot 2^{-8} = 15/64$.*
- *Če so i-ta, j-ta in k-ta peterica zaporedne, je $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2^{-7}$; takih neurejenih trojic je 8. Sicer je $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2^{-8}$; takih neurejenih trojic je $\binom{8}{3} - 8 = 48$. Sledi $p_3 = 8 \cdot 2^{-7} + 48 \cdot 2^{-8} = 1/4$.*
- *Brž ko vzamemo nabor več kot treh peteric, le-te pokrijejo vsa mesta, torej je verjetnost ustreznega preseka enaka $2^{-8} = 1/256$. Za $k = 3, 4, \ldots, 8$ torej velja $p_k = \binom{8}{k}/256$.*

Torej je končno

$$P(A^c) = 1 - 4 + \frac{15}{64} - \frac{1}{4} + \frac{70 - 56 + 28 - 8 + 1}{256} = \frac{223}{256} = 0{,}8710938 \,.$$

b. (5) Recimo, da nismo dobili nobenega zaporedja (vsaj) petih ničel. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bomo dobili zaporedje (vsaj) petih enic?

Rešitev: Izračunati je potrebno $P(B|A^c)$, kjer je A dogodek, da dobimo zaporedje (vsaj) petih ničel, B dogodek, da dobimo zaporedje (vsaj) petih enic. Toda če se zgodi B, se A zagotovo ne zgodi, zato je

$$P(B|A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{33}{223} \doteq 0{,}148 \,.$$