Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

1. kolokvij

25. april 2018

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.					
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.				•	
Skupaj					

1. (20) Standardno kocko n-krat vržemo, meti so neodvisni. Označimo jih z $1, 2, \ldots, n$. Za $k = 1, 2, \ldots, n$ označimo z A_k dogodek, da je v k-tem metu prvič padla ena pika, z B_l pa označimo dogodek, da je v l-tem metu zadnjič padlo šest pik.

a. (5) Za vse k in l izračunajte $P(A_k)$ in $P(B_l)$.

Rešitev: Dogodek A_k pomeni, da v prvih $k-1$ metih ni bilo enice, da pa je padla v k-tem metu; torej je $P(A_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$. Dogodek B_l pa pomeni, da v zadnjih prvih $n-l$ metih ni bilo šestice, da pa je padla v l-tem metu; torej je $P(B_l) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{l-1}$.

b. (15) Določite, za katere k in l sta dogodka A_k in B_l neodvisna.

Rešitev: Ločimo tri primere.

- *Za $k < l$ dogodek $A_k \cap B_l$ pomeni, da v prvih $k-1$ metih ni bilo enice, v k-tem metu je padla enica, v l-tem metu je padla šestica in v zadnjih $n-l$ metih ni bilo šestice. Torej je $P(A_k \cap B_l) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-l}$, kar je enako $P(A_k)\, P(B_l)$, torej sta dogodka A_k in B_l neodvisna.*
- *Za $k > l$ dogodek $A_k \cap B_l$ pomeni, da v prvih $l-1$ metih ni bilo enice, v l-tem metu je padla šestica, v vmesnih $k-l-1$ metih ni bilo niti enice niti šestice, v k-tem metu je padla enica, v zadnjih $n-k$ metih pa ni bilo šestice. Torej je $P(A_k \cap B_l) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k+l-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-l-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2$, kar ni enako $P(A_k)\, P(B_l)$, torej sta dogodka A_k in B_l odvisna.*
- *Za $k = l$ je dogodek $A_k \cap B_l$ nemogoč, torej je $P(A_k \cap B_l) = 0$, kar spet pomeni, da sta dogodka A_k in B_l odvisna.*

2. (20) Na večerjo pride n parov moških in žensk. Zanje je pripravljenih $2n$ stolov za okroglo mizo. Gostitelj bo posedel moške in ženske za mizo, tako da bodo alternirali po spolu, sicer pa povsem naključno. Lahko si predstavljate, da so stoli oštevilčeni v smeri urinega kazalca s števili od 1 do $2n$. Na stolih $1, 3, \ldots, 2n-1$ bodo ženske, na stolih $2, 4, \ldots, 2n$ pa moški. Oboji bodo neodvisno in slučajno permutirani. Želimo poiskati verjetnost, da noben par ne bo sedel na sosednjih stolih. Označite $A_i = \{\text{na stolih } i \text{ in } i+1 \text{ sedi par}\}$, pri čemer $2n+1$ razumemo kot 1.

a. (5) Izračunajte A_i za vse $i = 1, 2 \ldots, 2n$.

Rešitev: Partner osebe, ki je posedena na stol i, je lahko poseden na n možnih stolov, in sicer na vse z enakimi verjetnostmi (pogojno na to, da vemo, kdo je na stolu i). Sledi

$$P(A_i) = \frac{1}{n}\,.$$

b. (5) Izračunajte $P(A_i \cap A_j)$.

Rešitev: Če sta stola i in j sosednja, je presek nemogoč dogodek, ker bi sicer to impliciralo poligamijo ali poliandrijo. Če stola i in j nista sosednja (in sta različna), pa iz vsakega para $\{i, i+1\}$ in $\{j, j+1\}$ izberemo stol, na katerem sedi ženska. Moža teh dveh žensk sta lahko posedena na $n(n-1)$ enako verjetnih načinov, med katerimi pa je samo eden ustrezen. Sledi

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}\,.$$

c. (5) V katerih primerih bo verjetnost $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ različna od 0? Za ta primer to verjetnost, tudi izračunajte.

Rešitev: Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da so indeksi $i_1, i_2, \ldots, i_k$ različni. Tedaj bo verjetnost preseka dogodkov različna od 0 natanko tedaj, ko bodo pari sosednjih sedežev $\{i_1, i_1+1\}$, $\{i_2, i_2+1\}$, $\ldots$, $\{i_k, i_k+1\}$ disjunktni (kar med drugim pomeni $k \leq n$). Verjetnost izračunamo tako kot v prejšnji točki: iz vsakega para $\{i_j, i_j+1\}$ izberemo stol, na katerem sedi ženska. Možje teh žensk so lahko posedeni na $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ enako verjetnih načinov in samo eden je ustrezen. Sledi

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{(n-k)!}{n!}\,.$$

d. (5) Kot znano privzemite, da lahko izberete k neprekrivajočih se sosednjih parov stolov izmed $2n$ stolov za okroglo mizo na

$$S_{k,n} = \binom{2n-k}{k}\frac{2n}{2n-k}$$

načinov. Izračunajte verjetnost, da noben par ne bo sedel skupaj. Vsot vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Naj bo A dogodek, da noben par ne bo sedel skupaj. Po formuli za vključitve in izključitve dobimo

$$\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{2n} A_i\right) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} S_{k,n} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{2n-k}{k}\frac{2n}{2n-k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!}\,.
\end{aligned}$$

3. (20) Previdna roparja A in B sta se odločila, da bosta na “delo” odhajala izmenično, dokler nekoga od njiju ne bodo dobili pri kraji. Privzemite, da so posamezni ropi med seboj neodvisni. Roparja A ujamejo z verjetnostjo a, roparja B pa z verjetnostjo b. Prvi začne z ropi A.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bodo roparja A pri delu dobili prej kot roparja B?

Rešitev: Označimo

$$A_k = \{\textit{A-ju spodleti v k-tem poskusu, vsi prejšnji poskusi pa so obema uspeli}\}\,.$$

Ta dogodek se zgodi natanko takrat, ko je A uspešen $(k-1)$-krat in B $(k-1)$-krat, nato pa A-ju spodleti. Ker so ropi neodvisni, je

$$P(A_k) = (1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}a\,.$$

Dogodki A_k so za $k = 1, 2, \ldots$ disjunktni, njihova unija pa je ravno dogodek, da roparja A ujamejo prej kot roparja B. Sledi

$$\begin{aligned}
&P(\textit{roparja A ujamejo prej kot roparja B}) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \\
&\quad = a\sum_{k=1}^{\infty} \big((1-a)(1-b)\big)^{k-1} \\
&\quad = a\,\frac{1}{1-(1-a)(1-b)} \\
&\quad = \frac{a}{a+b-ab}\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Naj bo X celotno število ropov, vključno z zadnjim, ki ne uspe. Izračunajte porazdelitev te slučajne spremenljivke.

Rešitev: Možne vrednosti za spremenljivko X so $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ločiti moramo primera sodih in lihih n. Naj bo najprej $n = 2k$. V tem primeru je A uspešen k-krat, B uspešen $(k-1)$-krat in na koncu B ujet. Sledi

$$P(X = 2k) = (1-a)^k(1-b)^{k-1}b\,.$$

Če je $n = 2k-1$, je A uspešen $(k-1)$-krat, B uspešen $(k-1)$-krat in A ujet. Sledi

$$P(n = 2k-1) = (1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}a\,.$$

4. (20) Naj ima slučajna spremenljivka X Weibullovo gostoto dano z

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\alpha}$$

za $x > 0$ in 0 sicer, pri čemer $\alpha, \sigma > 0$.

a. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke

$$Y = \left(\frac{X}{\sigma}\right)^\alpha .$$

Rešitev: Opazimo, da je

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\alpha}$$

za $x > 0$. Računamo za $y > 0$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P\left(\left(\frac{X}{\sigma}\right)^\alpha \le y\right) \\ &= P\left(X \le \sigma y^{1/\alpha}\right) \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{\sigma y^{1/\alpha}}{\sigma}\right)^\alpha} \\ &= 1 - e^{-y} . \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$f_Y(y) = e^{-y}$$

za $y > 0$ in 0 sicer ali $Y \sim \exp(1)$.

b. (10) Naj bo $U \sim U(0,1)$. Pokažite, da ima slučajna spremenljivka

$$Z = \sigma\left(-\log U\right)^{1/\alpha}$$

za $\alpha, \sigma > 0$ Weibullovo gostoto.

Rešitev: Slučajna spremenljivka Z ima samo pozitivne vrednosti. Za $z > 0$ računamo

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= P\left(\sigma\left(-\log U\right)^{1/\alpha} \le z\right) \\ &= P\left(-\log U \le \left(\frac{z}{\sigma}\right)^\alpha\right) \\ &= P\left(\log U \ge -\left(\frac{z}{\sigma}\right)^\alpha\right) \\ &= P\left(U \ge e^{-\left(\frac{z}{\sigma}\right)^\alpha}\right) \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{z}{\sigma}\right)^\alpha} . \end{aligned}$$

5. (20) Slučajna spremenljivka X naj ima porazdelitev

$$P(X = k) = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

za $k = 0, 1, \ldots, n$.

a. (10) Pokažite, da je

$$\sum_{k=0}^{n} (2n-k+1) P(X = k) = 2(n+1) \left(1 - \binom{2n+2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)}\right) .$$

Namig: če namesto n vzamemo $n+1$, se verjetnosti v porazdelitvi še vedno seštejejo v 1. Preverite še, da je

$$(2n-k+1)\binom{2n-k}{n} = (n+1)\binom{2(n+1)-(k+1)}{n+1} .$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (2n-k+1) P(X = k) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n} (2n-k+1) \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n} 2(n+1) \binom{2(n+1)-(k+1)}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)-(k+1)} \\
&\quad = 2(n+1) \left(1 - \binom{2n+2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)}\right) .
\end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Iz prvega dela sledi, da je

$$2n + 1 - E(X) = 2(n+1) \left(1 - \binom{2n+2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right) .$$

Sledi

$$E(X) = -1 + 2(n+1) \binom{2n+2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} .$$

Z nekaj preureditvami lahko rezultat preuredimo v

$$E(X) = -1 + (2n+1)\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} .$$

6. (20) V r škatel vržemo n kroglic. Privzamemo, da so meti med sabo neodvisni, vsako škatlo pa zadenemo z enako verjetnostjo. Označimo z X število praznih škatel na koncu.

a. (5) Označite $P(X = 0) = b(n, r)$ in to količino izračunajte.

Namig: vključitve in izključitve.

Rešitev: Označimo $A = \{X = 0\}$ *in definirajmo*

$$A_k = \{k\text{-ta škatla je prazna}\}$$

za $k = 1, 2, \ldots, r$. *Velja* $A^c = \cup_{k=1}^r A_k$. *Računali bomo po formuli za vključitve in izključitve, zato potrebujemo verjetnosti* $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$ *za vse* k. *Z drugimi besedami, računamo verjetnost, da bomo v vseh metih zadeli preostalih* $r - k$ *škatel. Zaradi neodvisnosti metov je*

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = \left(\frac{r-k}{r}\right)^n .$$

Zaradi simetrije ima presek katerih koli k *dogodkov izmed* $A_1, \ldots, A_r$ *enako verjetnost, zato velja*

$$P(A) = 1 - P(A^c) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \left(\frac{r-k}{r}\right)^n .$$

b. (10) Izračunajte porazdelitev X.

Namig: pogojujte na dogodek, da je natanko določenih k *škatel praznih.*

Rešitev: Za fiksen $k = 0, 1, \ldots, r-1$ *si praznih* k *škatel lahko izberemo na* $\binom{r}{k}$ *načinov. Pogojno na to so vse kroglice razmeščene po ostalih* $r - k$ *škatlah kot da bi jih metali vanje z neodvisnimi meti in bi bile vse škatle enako verjetne. Pogojna verjetnost, da je vseh ostalih* $r - k$ *škatel polnih, je* $b(n, r-k)$. *Ker so ti možni načini, da se zgodi* $\{X = k\}$, *disjunktni, sledi*

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{r}{k} \left(\frac{r-k}{r}\right)^n b(n, r-k) = \\ &= \sum_{l=0}^{r-k} (-1)^l \frac{r!}{k!\, l!\, (r-k-l)!} \left(\frac{r-k-l}{r}\right)^n . \end{aligned}$$

c. (5) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Definirajmo

$$I_k = \begin{cases} 1, & \textit{če je } k\textit{-ta škatla prazna in} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Ker je $X = I_1 + \cdots + I_r$ *in imajo zaradi simetrije vsi indikatorji enako porazdelitev, velja*

$$E(X) = r\,P(I_1 = 1) = r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n .$$